

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

Л. Б. Коваленко

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модуль 3

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2019

УДК 51(075.8)

K56

Автор

Коваленко Людмила Борисівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувачка кафедри вищої математики

Рецензенти:

Храбустовський В. І., кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Харківського державного університету залізничного транспорту;

Щелкунова Л. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету будівництва та архітектури

Рекомендовано до друку

*Вченою радою ХНУМГ ім. О. М. Бекетова як навчальний посібник,
протокол № 8 від 01.03.2019*

Коваленко Л. Б.

K56 Вища математика. Модуль 3 : навч. посібник / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 233 с.

ISBN 978-966-695-488-9

У навчальному посібнику розглянуто питання з п'яти розділів вищої математики. Наведено основні визначення та теореми. У кожному розділі подано приклади задач та методичні рекомендації до їх розв'язання. Довідковий матеріал містить теоретичні відомості та приклади їхнього застосування в конспективній формі, що сприяє самостійній роботі студентів в позааудиторний час.

Посібник складено з метою допомогти студентам будівельних спеціальностей вишів під час підготовки до занять, заліків та іспитів із курсу вищої математики.

УДК 51(075.8)

ISBN 978-966-695-488-9

© Л. Б. Коваленко, 2019

© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА	6
Розділ 11 ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ	7
11.1 Задача про об'єм циліндричного тіла	7
11.2 Властивості визначеного інтегралу	11
11.3 Обчислення подвійних інтегралів	13
11.4 Подвійний інтеграл у полярних координатах	25
11.5 Застосування подвійного інтеграла	31
11.5.1 Площа плоскої фігури	31
11.5.2 Об'єм циліндричного тіла	34
11.5.3 Площа поверхні	36
11.5.4 Застосування подвійних інтегралів у задачах механіки	38
Контрольні питання	47
Розділ 12 ПОТРІЙНІ ІНТЕГРАЛИ	48
12.1 Задача про масу неоднорідного тіла	48
12.2 Властивості потрійних інтегралів	49
12.3 Обчислення потрійних інтегралів	50
12.3.1 Обчислення потрійних інтегралів у декартовій системі координат	51
12.3.2 Обчислення потрійних інтегралів у циліндричній системі координат	55
12.3.3 Обчислення потрійних інтегралів у сферичній системі координат	59
12.3.4 Застосування потрійних інтегралів	63
Контрольні питання	70
Розділ 13 КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛ	71
13.1 Задача про масу просторової лінії	71
13.2 Задача про роботу силового поля	72
13.3 Визначення криволінійних інтегралів	74
13.4 Властивості криволінійних інтегралів	76
13.5 Обчислення криволінійних інтегралів першого роду	79

13.6 Обчислення криволінійних інтегралів	
другого роду	86
13.7 Формула Гріна	92
13.8 Умова незалежності криволінійного	
інтеграла від шляху інтегрування	99
13.9 Інтегрування повних диференціалів.	
Первісна функція	103
13.10 Деякі застосування криволінійних	
інтегралів	108
Контрольні питання	113
Розділ 14 ЧИСЛОВІ РЯДИ	114
14.1 Загальні визначення	114
14.2 Властивості числових рядів	116
14.3 Збіжність рядів з додатними членами.	
Необхідна ознака збіжності ряду	118
14.4 Збіжність рядів з додатними членами.	
Достатні ознаки збіжності ряду	120
14.4.1 Ознака порівняння	120
14.4.2 Ознака Даламбера	123
14.4.3 Радикальна ознака Коші	126
14.4.4 Інтегральна ознака Коші	128
14.5 Збіжність знакозмінних рядів. Необхідна	
ознака збіжності. Теорема Лейбниця	132
14.6 Збіжність знакозмінних рядів.	
Достатня ознака збіжності	135
Контрольні питання	139
Розділ 15 ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ	140
15.1 Загальні визначення	140
15.2 Властивості правильно збіжних	
функціональних рядів	142
15.3 Степеневі ряди. Теорема Абеля	143
15.4 Область збіжності степеневому ряду.	
Радіус збіжності степеневому ряду	144
15.5 Властивості степеневих рядів	152

15.6 Розклад функцій у степеневі ряди.	153
Ряд Тейлора	
15.7 Ряд Маклорена. Розклад елементарних функцій в ряд Маклорена	159
15.8 Деякі застосування рядів Тейлора та Маклорена	168
15.8.1 Наближене обчислення функцій	168
15.8.2 Інтегрування функцій	172
15.8.3 Інтегрування диференціальних рівнянь	175
Контрольні питання	179
Розділ 16 РЯДИ ФУР'Є.	180
16.1 Гармонічні коливання	180
16.2 Тригонометричні ряди	181
16.3 Ряди Фур'є	185
16.4 Розклад періодичних функцій у ряд Фур'є	187
16.5 Розклад у ряд Фур'є парних та непарних функцій	191
16.6 Розклад у ряд Фур'є функцій з довільним періодом	195
Контрольні питання	198
ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ	199
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	232

ПЕРЕДМОВА

Основою цього посібника є цикл лекцій з вищої математики для студентів, що навчаються за напрямом підготовки бакалаврів 192 - Будівництво та цивільна інженерія, які читає автор в Харківському національному університеті міського господарства імені О. М. Бекетова.

Навчальний посібник побудований за модульною технологією навчання згідно з робочими програмами курсу «Вища математика». Доступне, коректне подання теоретичного матеріалу супроводжується детальними ілюстраціями, великою кількістю прикладів.

Посібник розрахований на засвоєння матеріалу третього модуля та є логічним продовженням посібників «Вища математика. Модуль 1» і «Вища математика. Модуль 2». Відповідно до програми охоплено такі розділи вищої математики, як кратні, криволінійні інтеграли та їх застосування, числові та функціональні ряди, ряди Фур'є.

Кожний розділ посібника супроводжується достатню кількістю прикладів. Це дає змогу студентам денної та заочної форм навчання самостійно вивчати цей курс вищої математики.

У стислій формі подано довідковий матеріал, який допоможе під час розв'язання задач.

У комплекті із цим посібником студентам пропонується «Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 3», у якому містяться завдання щодо практичного опрацювання вивченого теоретичного матеріалу.

Розділ 11 ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

11.1 Задача про об'єм циліндричного тіла

Ми починаємо вивчення теми інтегрального числення двох змінних, як завжди, з розв'язання конкретної задачі – задачі про обчислення об'єму циліндричного тіла.

Визначення 11.1. Циліндричним тілом називається тіло, яке обмежене координатною площиною xOy , поверхнею $z = f(x, y)$, з якою будь-яка пряма, паралельна до осі Oz , перетинається не більше ніж в одній точці, та циліндричною поверхнею, твірна якої паралельна до осі Oz (рис. 11.1).

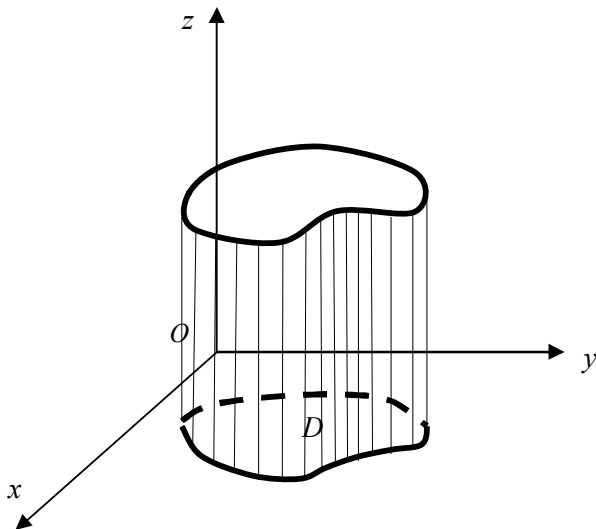


Рисунок 11.1 – Циліндричне тіло

Визначення 11.2. Область D , що утворюється шляхом перетину циліндричного тіла з площиною xOy , називається **основною** циліндричного тіла.

З курсу середньої школи ми пам'ятаємо, що будь-яке тіло можна скласти з суми декількох тіл, а об'єм утвореної фігури дорівнює суми об'ємів тіл, з яких складено фігуру.

Тому для розв'язання поставленої задачі будемо спиратися на такі твердження:

- якщо тіло розбити на частини, то об'єм дорівнює сумі об'ємів всіх його частин;
- об'єм прямого циліндра дорівнює добутку площі основи на висоту.

Будемо вважати функцію $z = f(x, y)$ неперервною в області D та припустимо, що поверхня цілком розташована над площиною xOy , тобто $f(x, y) > 0$.

Алгоритм розв'язання поставленої задачі аналогічний до розв'язання задачі про площу криволінійної трапеції (см. п. 8.9), а саме: розіб'ємо основу циліндричного тіла (область D) на n областей довільної форми, їх, як і раніше будемо називати частковими областями (рис. 11.2).

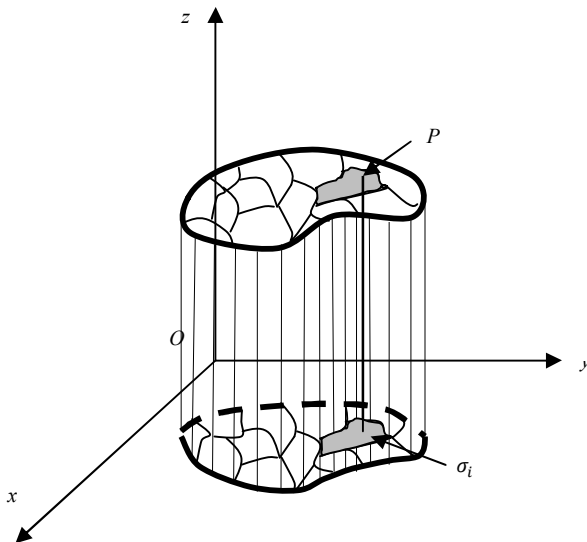


Рисунок 11.2 – Розбиття основи циліндричного тіла на n областей

Позначимо їх у будь-якому порядку як $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, а відповідні їм значення площин - $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. Через межу кожної з областей проведемо циліндричну поверхню з твірною, яка паралельна до осі Oz . Тобто початкове циліндричне тіло нами розбито на n циліндричних тіл. Оберемо в кожній частковій області σ_i довільну точку $P_i(x_i, y_i)$ і замінимо існуюче циліндричне тіло прямими циліндром із тією самою основою та висотою, яка дорівнює значенню функції в точці P_i : $z_i = f(x_i, y_i)$.

У результаті ми отримаємо ступінчасте тіло, об'єм якого дорівнює

$$\begin{aligned} V_n &= f(x_1, y_1)\Delta\sigma_1 + f(x_2, y_2)\Delta\sigma_2 + \dots + f(x_n, y_n)\Delta\sigma_n = \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Якщо вважати, що шуканий об'єм цього циліндричного тіла V наближено дорівнює об'єму побудованого n -сходинкового тіла, зрозуміло, що V_n тим точніше буде виражати значення об'єму V , чим більше кількість n часткових областей та менший максимальний розмір (діаметр) кожної з них.

Перейдемо до границі у разі прямуванні до нуля найбільшого з діаметрів часткових областей (при цьому $n \rightarrow \infty$), маємо:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i. \quad (11.2)$$

До границі таких сум функції двох незалежних змінних (11.2) приводять різноманітні задачі, а не лише задача про об'єм циліндричного тіла. Тому розглянемо це питання у загальному вигляді.

Нехай $f(x, y)$ – будь-яка функція двох змінних, яка неперервна в області D , обмеженої замкнутою лінією. Саме так, як і раніше, розіб'ємо область D на часткові, оберемо в кожній області довільну точку $P_i(x_i, y_i)$ і складемо суму

$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta \sigma_i$, яка називається ***n*-й інтегральною сумою** для функції $f(x, y)$ в області D .

Визначення 11.3. Подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ по області D називається границя, до якої прямує n -та інтегральна сума у разі прямуванні до нуля найбільшого діаметра часткових областей:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta \sigma_i = \iint_D f(x, y) d\sigma. \quad (11.3)$$

Тут $f(x, y) d\sigma$ – підінтегральний вираз, $f(x, y)$ - підінтегральна функція, $d\sigma$ - елемент площини, область D - областю інтегрування, змінні x і y - змінними інтегрування.

Згідно з наведеним визначенням, можна сказати, що об'єм циліндричного тіла, яке обмежене площиною xOy , поверхнею $z = f(x, y)$ та циліндричною поверхнею з твірною, яка паралельна до осі Oz має бути виражений як подвійний інтеграл від функції $f(x, y)$ по області, що є основою циліндричного тіла:

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma. \quad (11.4)$$

Аналогічно до теореми про існування визначеного інтегралу, сформулюємо теорему про існування подвійного інтегралу.

Теорема 11.1 (про існування подвійного інтегралу).

Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в області D , яка обмежена замкненою лінією, то її n -та інтегральна сума прямує до границі у разі наближення до нуля найбільшого з діаметрів часткових областей. Ця границя, тобто подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) d\sigma$

не залежить від способу розбиття області D на часткові області σ_i та от вибору в них точок P_i .

11.2 Властивості визначеного інтеграла

У попередньому пункті ми вже з'ясували, що визначення, структура визначеного інтеграла функції однієї змінної та подвійного інтеграла функції двох змінних цілком (см. п. 8.10) ідентичні. Тому й властивості (та їх доведення) подвійних та визначених інтегралів аналогічні. Приведемо їх без доведення.

Теорема 11.2 (про інтеграл суми). Подвійний інтеграл від суми декількох функцій дорівнює сумі подвійних інтегралів від функцій-доданків:

$$\begin{aligned} & \iint_D (f(x, y) + \varphi(x, y) + \dots + \psi(x, y)) d\sigma = \\ &= \iint_D f(x, y) d\sigma + \iint_D \varphi(x, y) d\sigma + \dots + \iint_D \psi(x, y) d\sigma. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Теорема 11.3 (про винесення постійного множника). Постійний множник підінтегральної функції можна виносити за знак подвійного інтеграла:

$$\iint_D C \cdot f(x, y) d\sigma = C \iint_D f(x, y) d\sigma. \quad (11.6)$$

Теорема 11.4 (про адитивність подвійного інтеграла). Якщо область інтегрування D розбита на частини D_1 і D_2 , то подвійний інтеграл дорівнює сумі подвійних інтегралів по кожній із часткових областей:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma. \quad (11.7)$$

Теорема 11.5 (про знак подвійного інтеграла). Якщо підінтегральна функція $f(x, y)$ в області інтегрування D не змінює знака, то подвійний інтеграл є числом того самого знака, що й підінтегральна функція. Тобто, якщо, наприклад, $f(x, y) > 0$ в області D , то $\iint_D f(x, y) d\sigma > 0$.

Наслідок. Якщо в усіх точках області D функції $f(x, y)$ і $\varphi(x, y)$ задовольняють умові $f(x, y) \geq \varphi(x, y)$, то подвійні інтеграли від цих функцій також задовольняють умові

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \geq \iint_D \varphi(x, y) d\sigma, \quad (11.8)$$

при цьому знак рівності має місце лише за умови рівності функцій.

Теорема 11.6 (про оцінку подвійного інтеграла). Якщо функція $f(x, y)$ в усіх точках області інтегрування D задовольняє умові

$$m \leq f(x, y) \leq M,$$

де m - найменше, а M - найбільше значення функції $f(x, y)$ в області D , то подвійний інтеграл від цієї функції задовольняє умові

$$mS \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq MS, \quad (11.9)$$

де S - площа області D .

Теорема 11.7 (про середнє значення подвійного інтеграла). Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в області

інтегрування D , то в цій області існує хоча б одна така точка (ξ, η) , для якої буде виконуватися умова

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot S. \quad (11.10)$$

Значення $f(\xi, \eta)$ у (11.10) називається середнім значенням функції $f(x, y)$ в області D .

11.3 Обчислення подвійних інтегралів

Для визначення подвійного інтеграла $\iint_D f(x, y) d\sigma$ область інтегрування D ми розбивали довільними лініями на елементи площі $d\sigma$. Для обчислення подвійного інтеграла в декартовій системі координат ми будемо розбивати область інтегрування D лініями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, паралельними координатним осям Oy і Ox відповідно. При такому способі розбиття ми отримаємо часткові області у вигляді прямокутників, площа кожної з них $\Delta\sigma$ дорівнюватиме добутку сторін Δx і Δy . Тому елемент площі має бути записаний у вигляді

$$d\sigma = dx dy,$$

тобто елемент площі області D у декартовій системі координат дорівнює добутку диференціалів незалежних змінних. Остаточно маємо

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (11.11)$$

Для обчислення подвійного інтеграла (11.11) будемо спиратися на доведений нами факт, що за допомогою цієї формули обчислюється об'єм циліндричного тіла. Пригадаємо, що під час розглядання питання про застосування визначеного

інтеграла в задачах геометрії (п. 8.15) ми вже отримували формулу для обчислення об'ємів (8.68):

$$V = \int_a^b S(x) dx, \quad (11.12)$$

де $S(x)$ - площа перетину тіла площиною, перпендикулярною до осі абсцис, а $x = a$ і $x = b$ - рівняння площин, що обмежують це тіло. Застосуємо цю формулу для обчислення подвійного інтеграла (11.11).

Зауважимо, що область інтегрування D повинна задовольняти такій умові: будь-яка пряма, яка проходить паралельно осі Ox або Oy , перетинає межу області D не більше ніж у двох точках. Тіло, яке задовольняє сформульованій умові, зображено на рисунку 11.3.

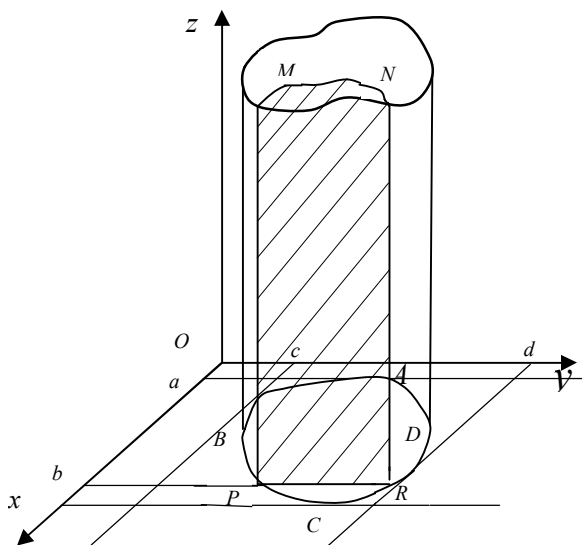


Рисунок 11.3 – Циліндричне тіло

Область D обмежимо прямокутником, сторонами якого є прямі $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, які дотинаються до межі області в точках A, B, C, E (рис. 11.4).

Розглянути область інтегрування можна двома способами:

1. Точками A і C межа області розбивається на дві лінії:

$$y = y_1(x) \quad (ABC),$$

$$y = y_2(x) \quad (AEC),$$

кожна з яких перетинається з будь-якою прямою, паралельною до осі ординат в одній точці.

2. Точками B і E межа області розбивається на дві лінії:

$$x = x_1(y) \quad (BAE),$$

$$x = x_2(y) \quad (BCE),$$

кожна з яких перетинається з будь-якою прямою, паралельною до осі абсцис в одній точці.

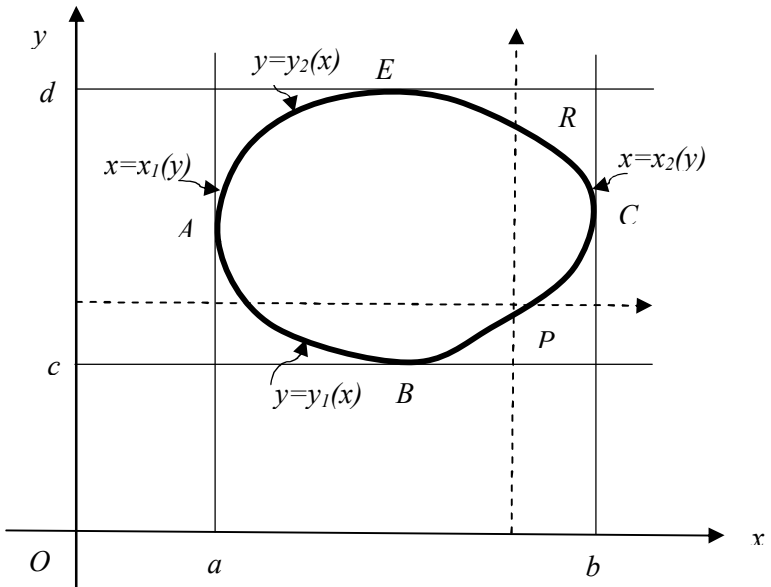


Рисунок 11.4 – Область інтегрування –
основа циліндричного тіла

Виконаємо перетин циліндричного тіла довільною площиною, паралельною до площини yOz , тобто $x = \text{const}$ ($a \leq x \leq b$) (рис. 11.3). В результаті перетину отримаємо криволінійну трапецію $PNMR$, площу якої ми навчилися обчислювати за допомогою визначеного інтеграла (8.58). З того, що ми перетинаємо тіло площинами $x = \text{const}$, функція $f(x, y)$ вважається функцією однієї змінної y , при цьому y змінює значення від ординати точки входу P до ординати точки виходу R в область D . З рівнянь ліній ABC і AEC прямує, що ординати цих точок при незмінній абсцисі відповідно дорівнюють $y_1(x)$ і $y_2(x)$.

Тому площа перетину буде залежати від вибору значення x і обчислюється за формулою

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

Згідно з формулою (11.12) об'єм усього тіла дорівнює інтегралу від $S(x)$ в інтервалі зміни x ($a \leq x \leq b$):

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

або

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (11.13)$$

Межі внутрішнього інтеграла, як ми бачимо, змінні, вони вказують на зміну змінної інтегрування y при незмінному значенні аргументу x . Межі зовнішнього інтеграла постійні, вони вказують межі, у яких може змінюватися аргумент x .

Якщо замінімо в запропонованому алгоритмі ролі x і y , тобто виконаємо перетин циліндричного тіла площинами $y = \text{const}$ ($c \leq y \leq d$), отримаємо формулу, у якій внутрішній інтеграл має змінні границі $x_1(y), x_2(y)$, а зовнішні – постійні ($c \leq y \leq d$):

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (11.14)$$

З формул (11.13), (11.14) бачимо, що обчислення подвійного інтеграла зводиться до послідовного обчислення двох визначених інтегралів. Тобто обчислення подвійного інтеграла зводиться до **повторного** або **двократного інтегрування**.

Вибір між формулами (11.13) і (11.14) для зведення подвійного інтегралу до двократного залежить лише від точки зору на область інтегрування D : її можна розглядати як вертикальну або як горизонтальну. Розглянемо обидві ситуації:

- I. Нехай область D - вертикальна, обмежена лініями $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ і $a \leq x \leq b$ (рис. 11.5).

Проведемо промінь, паралельний до осі ординат. Точку, у якій промінь «входить» область D будемо називати **точкою входу**, а точку, у якій промінь «виходить» з області – **точкою виходу**. Промінь можна паралельно переміщати всередині області D , при цьому всі точки входу належать лінії $y = y_1(x)$, яку будемо називати **лінією входу**, а всі точки виходу на лежать лінії $y = y_2(x)$, яку відповідно будемо називати **лінією виходу**. Лінії входу та виходу слугують межами інтегрування внутрішнього інтегралу. При цьому промінь може переміщатися зліва направо лише в межах $a \leq x \leq b$, які і виконують роль меж інтегрування зовнішнього інтеграла.

Запам'ятаймо:

Якщо область D – вертикальна, промінь паралельний до осі Oy , внутрішній інтеграл - за змінною y , зовнішній – за змінною x .

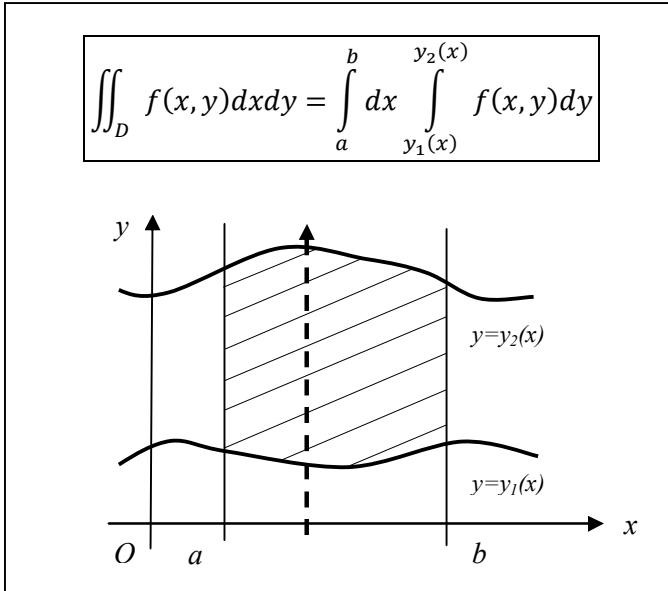


Рисунок 11.5 - Область D - вертикальна

- II. Нехай область D - горизонтальна, обмежена лініями $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ і $c \leq y \leq d$ (рис. 11.6).

Проведемо промінь, паралельний до осі абсцис. Точку, у якій промінь «входить» область D , будемо називати **точкою входу**, а точку, у якій промінь «виходить» з області – **точкою виходу**. Промінь можна паралельно переміщати всередині області D , при цьому всі точки входу належать лінії $x = x_1(y)$, яку будемо називати **лінією входу**, а всі точки виходу на лежать лінії $x = x_2(y)$, яку відповідно будемо називати **лінією виходу**.

Лінії входу та виходу слугують межами інтегрування внутрішнього інтегралу. При цьому промінь може переміщатися знизу догори лише в межах $c \leq y \leq d$, які й виконують роль меж інтегрування зовнішнього інтеграла.

\ **Запам'ятаймо:**

Якщо область D – горизонтальна, промінь паралельний до осі Ox , внутрішній інтеграл - за змінною x , зовнішній – за змінною y .

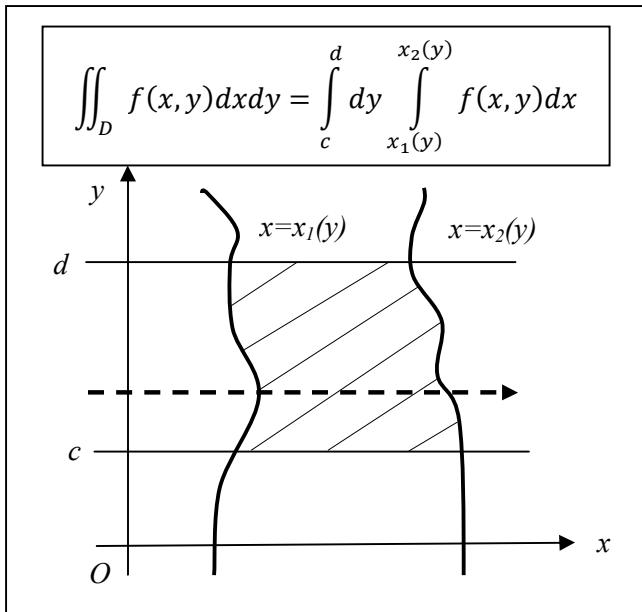


Рисунок 11.6 - Область D – горизонтальна

Зауваження: приведення подвійного інтеграла до двократного має найпростіший вигляд, якщо область D - прямокутник зі сторонами, паралельними до осей координат

(рис. 11.7). У такому випадку межі інтегрування будуть сталими як у зовнішньому, так і у внутрішньому інтегралах:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (11.15)$$

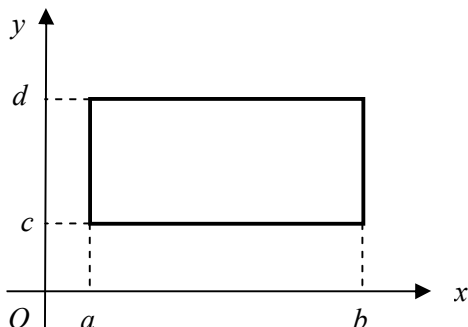
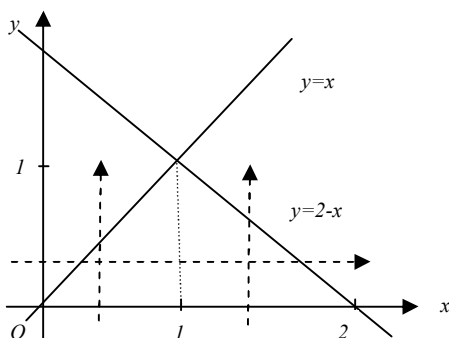


Рисунок 11.7 - Область D - прямокутник

Приклад 11.1. Розставити межі інтегрування подвійного інтегрування двома способами, якщо область D обмежена лініями $y = 0, y = x, y = 2 - x$.

Розв'язання. Побудуємо область D (рис. 11.8). Знайдемо



точки перетину ліній. Для цього необхідно розв'язати (у загальному випадку) системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Зауважимо, що лінії, які наведені в цій задачі – елементарні, і знайти їхні точки перетину можна усно.

Рисунок 11.8 - Область D

Отже, розв'яжемо системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow (0; 0); \begin{cases} y = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow (2; 0); \begin{cases} y = x \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow (1; 1).$$

1) Розглянемо область інтегрування як горизонтальну. Для цього проведемо промінь, паралельний до осі абсцис. Бачимо, що в межах області D промінь всюди входить в одну ту саму лінію $y = x$ (або $x = y$), лінія виходу теж незмінна - $y = 2 - x$ (або $x = 2 - y$). Вертикальні межі області (найнижча та найвища точки переміщення проміню) $y = 0$ і $y = 1$. За формулою (11.14) розставимо межі інтегрування:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x, y) dx.$$

2) Розглянемо область інтегрування як вертикальну. Для цього проведемо промінь, паралельний осі ординат. Бачимо, що в межах області D промінь всюди входить в одну ту ж саму лінію $y = 0$, лінії виходу – різні. Тому виникає необхідність розбити область інтегрування на дві частини. За властивістю адитивності (теорема 11.4) така можливість існує. У такому випадку подвійний інтеграл буде представлений у вигляді суми двох двократних інтегралів по кожній з часткових областей. Проведемо два проміні та за формулою (11.13) розставимо межі інтегрування:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy.$$

За результатами розв'язання цього прикладу бачимо, що від вибору порядку інтегрування залежить кількість необхідних обчислень та процедур.

Приклад 11.2. Замінити порядок інтегрування в двократному інтегралі, попередньо зобразивши область інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

Розв'язання. З'ясуємо, якими лініями обмежена область D . Для цього «прочитаємо» у заданих двократних інтегралах межі інтегрування. Отже, у першому з інтегралів «лінія входу» $x = -\sqrt{y}$, а «лінія виходу» $x = \sqrt{y}$. Це ліва та права гілки параболи $y = x^2$, при цьому ордината змінюється від 0 до 1. У другому з інтегралів «лінія входу» - пряма $x = y - 2$, а «лінія виходу» - права гілка параболи $x = \sqrt{y}$, при цьому ордината змінюється від 1 до 4. Побудуємо область D (рис. 11.9).

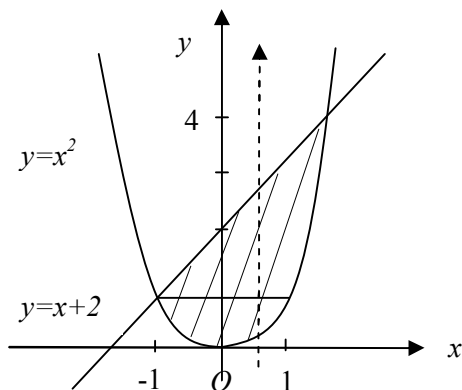


Рисунок 11.9 - Область D

Бачимо, що дві частини області інтегрування «склеїлися» в одну. Проведемо промінь, паралельний до осі ординат. «Лінією входу» буде парабола $y = x^2$, а «лінією виходу» - пряма $y = x + 2$. Межі інтегрування знайдемо із розв'язання системи рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^2; \\ y = x + 2; \end{cases} \quad x^2 = x + 2;$$

або $x^2 - x + 2 = 0$, звідси маємо $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

За формулою (11.13) двократний інтеграл перепишеться у вигляді:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy$$

Приклад 11.3. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D x^4 y dx dy,$$

якщо область D обмежена лініями $xy = 1$, $y - x = 0$, $x = 2$.

Розв'язання. Побудуємо область D (рис. 11.10). Оберемо порядок інтегрування.

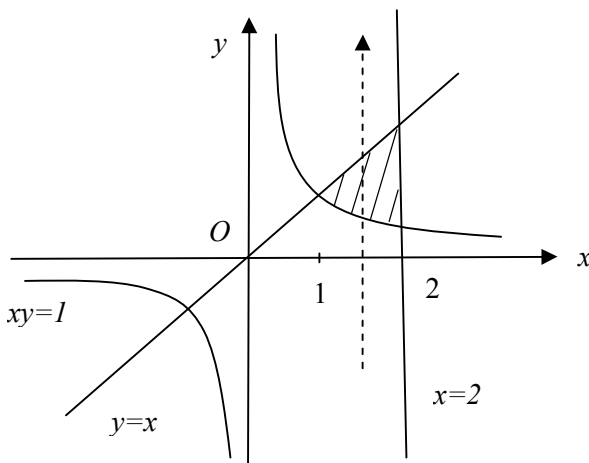


Рисунок 11.10 - Область D

Бачимо, що у випадку представлення області D як горизонтальної, «ліній входу» - дві, тому за властивістю адитивності подвійного інтеграла, його необхідно розбити на два двократних інтеграла, які потім й обчислюватиме. Якщо представити область D як вертикальну, то задача значно спрощується: «лінія входу» та «лінія виходу» у межах області

інтегрування єдина, тому й обчислювати необхідно буде лише один двократний інтеграл. Зрозуміло, що ми оберемо найпростіший шлях – представимо область інтегрування як вертикальну. Знайдемо межі інтегрування, розв'язавши системи рівнянь:

$$\begin{cases} xy = 1; \\ y - x = 0; \\ xy = 1; \\ x = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1; -1); (1; 1); \\ \left(2; \frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Розставимо межі інтегрування

$$\iint_D x^4 y dx dy = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x x^4 y dy.$$

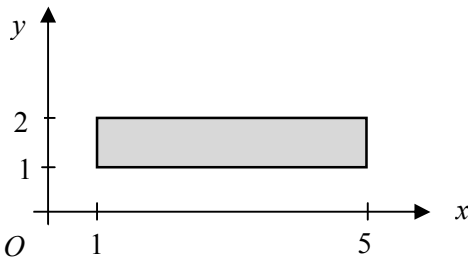
і обчислимо спочатку внутрішній, а потім зовнішній інтеграл. Будемо уважними: під час інтегрування за змінною y , x вважається сталою величиною:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left[x^4 \cdot \frac{y^2}{2} \right]_{\frac{1}{x}}^x dx &= \frac{1}{2} \int_1^2 x^4 \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (x^6 - x^2) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^7}{7} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{128}{7} - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{127}{7} - \frac{7}{3} \right) = \frac{166}{21} = 7 \frac{19}{21}. \end{aligned}$$

Приклад 11.4. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D \frac{x}{y^2} dx dy,$$

якщо область D - прямокутник, обмежений лініями $x = 1$; $x = 5$; $y = 1$; $y = 2$.



Розв'язання. Побудуємо область D (рис. 11.11). У випадку прямокутної області інтегрування вибір порядку інтегрування не є принциповим. В обох випадках ми маємо сталі межі інтегрування як внутрішнього, так і зовнішнього інтеграла.

Рисунок 11.11 - Область D

Отже, за формулою (11.15) маємо

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x}{y^2} dx dy &= \int_1^5 dx \int_1^2 \frac{x}{y^2} dy = \int_1^5 x \left(-\frac{1}{y^2} \right) \Big|_1^2 dx = \\ &= \int_1^5 x \left(-\frac{1}{4} + 1 \right) dx = \frac{3}{4} \int_1^5 x dx = \frac{3}{4} \frac{x^2}{2} \Big|_1^5 = \frac{3}{8} (25 - 1) = 9. \end{aligned}$$

11.4 Подвійний інтеграл у полярних координатах

У п. 11.3 ми навчилися обчислювати подвійні інтеграли $\iint_D f(x, y) d\sigma$ у декартовій системі координат. Розглянемо тепер область інтегрування в полярних координатах r, φ . Будемо вважати, що полюс полярної системи координат співпадає з початком декартової системи координат, а полярна вісь — з віссю абсцис. У такому випадку зв'язок між декартовою та полярною системами координат має вигляд:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Розбивати область інтегрування D на часткові будемо системою ліній $\rho = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, які становлять

концентричні кола з центром у полюсі та промені, що мають початок у полюсі полярної системи координат (рис. 11.12).

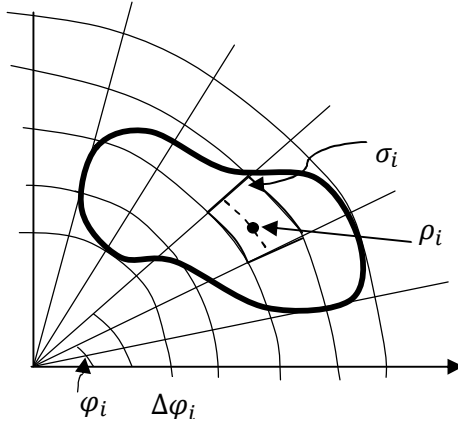


Рисунок 11.12 – Область інтегрування в полярній системі координат

У такому випадку часткові області є криволінійними прямокутниками, площу кожної з них будемо знаходити за формулою

$$\Delta \sigma_i = \frac{1}{2} (\rho_i + \Delta \rho_i)^2 \Delta \varphi_i - \frac{1}{2} \rho_i^2 \Delta \varphi_i = \left(\rho_i + \frac{\Delta \rho_i}{2} \right) \Delta \rho_i \Delta \varphi_i.$$

Якщо позначимо середній радіус між ρ_i і $\rho_i + \Delta \rho_i$ як $\rho'_i = \rho_i + \frac{\Delta \rho_i}{2}$, маємо

$$\Delta \sigma_i = \rho'_i \Delta \rho_i \Delta \varphi_i.$$

Для розбиття області інтегрування на часткові, у кожній з часткових областей довільно обираємо точки $P_i(x_i, y_i)$. Для заданої функції $f(x, y)$ інтегральні суми набувають вигляду

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta \sigma_i = \sum_{i=1}^n f(\rho'_i \cos \varphi_i, \rho'_i \sin \varphi_i) \rho'_i \Delta \rho_i \Delta \varphi_i.$$

Перейдемо до границі, подвійний інтеграл у полярних координатах набуває вигляду:

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi. \quad (11.16)$$

Запам'ятаймо. При переході до полярної системи координат необхідно скористатися формулами переходу

$$x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi; \quad dx dy = \rho d\rho d\varphi. \quad (11.17)$$

Як у декартовій, так і в полярній системі координат подвійний інтеграл зводиться до двократного, тобто послідовному інтегруванню за змінними ρ і φ . Розглянемо всі можливі випадки розташування області інтегрування відносно полюса полярної системи координат.

I. Полюс розташований поза межами області інтегрування (рис. 11.13).

Область інтегрування D обмежена лініями $\rho_1(\varphi)$ і $\rho_2(\varphi)$, і променями $\varphi = \varphi_1$ і $\varphi = \varphi_2$. При цьому координатні лінії $\varphi = \text{const}$ перетинають межі області не більш ніж у двох точках. Внутрішній інтеграл обчислюється за змінною ρ у межах його зміни при постійному φ від $\rho_1(\varphi)$ до $\rho_2(\varphi)$, зовнішній інтеграл по φ від φ_1 до φ_2 :

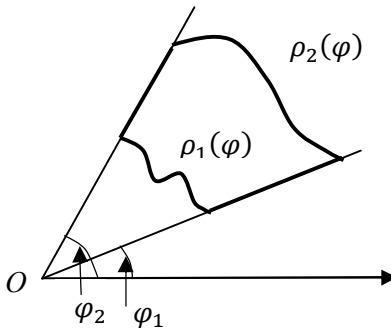
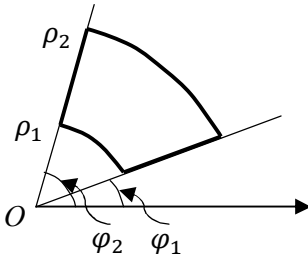


Рисунок 11.13 – Область інтегрування з полюсом, який розташований поза межами області

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \quad (11.18)$$

Зауваження 1. Інтегрування в оберненому порядку, тобто спочатку по φ , а потім по ρ не зустрічається.



Зауваження 2. Якщо область інтегрування – частина кругового кільця (рис. 11.14) $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, то межі інтегрування постійні за обома змінними:

Рисунок 11.14 – Область D

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \quad (11.19)$$

II. Полюс розташований всередині області інтегрування (рис. 11.15). У такому випадку будь-який полярний радіус перетинає межу інтегрування лише в одній точці. Такі області називають «зірковими» відносно полюса. Межі інтегрування за змінною φ у «зіркових» областях завжди від 0 до 2π . Найменше значення полярний радіуса – 0, а верхня межа інтегрування визначається рівнянням межі області $\rho(\varphi)$:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \quad (11.20)$$

У випадку, коли область інтегрування є круг з центром у полюсі $\rho(\varphi) = R = \text{const}$, маємо

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \quad (11.21)$$

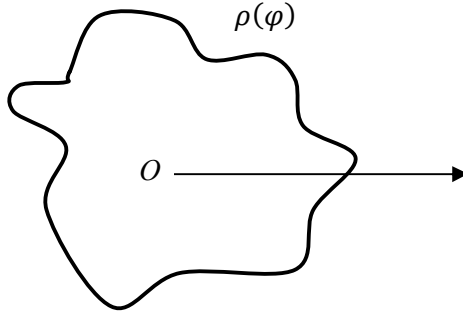


Рисунок 11.15 – Область інтегрування з полюсом, який розташований у середині області

Приклад 11.5. Обчислити двократний інтеграл у полярній системі координат

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^2 \rho^2 \sin^2 \varphi d\rho.$$

Розв'язання. Межі інтегрування в двократному інтегралі вже визначені, тому в побудові області D немає необхідності. Але зауважимо, що областю інтегрування є восьма частина кола з радіусом у 2 одиниці. Внутрішній та зовнішній інтеграли містять сталі межі, тому інтеграли за змінними ρ та φ можуть бути обчислені незалежно один від одного:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^2 \rho^2 \sin^2 \varphi d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \varphi d\varphi \cdot \int_0^2 \rho^2 d\rho =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi \cdot \int_0^2 \rho^2 d\rho = \frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\rho^3}{3} \bigg|_0^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right) \cdot \frac{8}{3} = \frac{1}{3} (\pi - 2).
 \end{aligned}$$

Приклад 11.6. Обчислити подвійний інтеграл, попередньо виконавши перехід до полярної системи координат

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}},$$

якщо областю інтегрування є коло $x^2 + y^2 \leq 16$.

Розв'язання. Область інтегрування – «зіркова» (рис. 11.16), тому перейдемо до полярних координат за формулами переходу (11.17) та зведемо подвійний інтеграл до двократного за формулою (11.21):

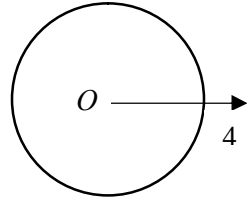


Рисунок 11.16 – Область D

$$\begin{aligned}
 \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{25 - \rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi}} = \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{25 - \rho^2}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \int_0^4 \frac{d(25 - \rho^2)}{\sqrt{25 - \rho^2}} = \\
 &= -\varphi \bigg|_0^{2\pi} \cdot \sqrt{25 - \rho^2} \bigg|_0^4 = -2\pi \cdot (3 - 5) = 4\pi.
 \end{aligned}$$

Приклад 11.7. Розставити межі інтегрування в подвійному інтегралі в полярних координатах, якщо область інтегрування – круг $x^2 + y^2 \leq 6x$.

Розв'язання. З'ясуємо координати центра та радіус круга:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 6x &= 0; & (x^2 - 6x + 9) - 9 + y^2 &= 0; \\(x - 3)^2 + y^2 &= 9.\end{aligned}$$

Отже центр круга лежить у точці з координатами $(3,0)$, а радіус дорівнює 3 одиницям (рис. 11.17). Перейдемо до полярних координат:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi; \\ \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi &= 6\rho \cos \varphi \\ \rho^2 &= 6\rho \cos \varphi \quad \text{або} \quad \rho = 6 \cos \varphi.\end{aligned}$$

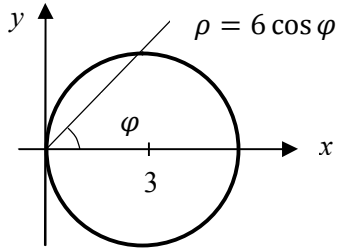


Рисунок 11.17 - Область D

Рисунок допомагає нам з'ясувати, що межі зміни φ від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Отже, за формулою 11.19 зведення подвійного інтеграла до двократного має вигляд

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{6 \cos \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

11.5 Застосування подвійного інтеграла

11.5.1 Площа плоскої фігури

У подвійному інтегралі $\iint_D f(x, y) dx dy$ оберемо підінтегральну функцію $f(x, y) \equiv 1$, отримаємо інтеграл від елемента площини по області D , тобто отримаємо формулу для обчислення площі плоскої фігури – площі області інтегрування D :

$$S = \iint_D dx dy. \quad (11.22)$$

Приклад 11.8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $x + y = 4$; $x - 3y = 0$; $x + y = 8$; $3x - y = 0$.

Розв'язання. Побудуємо область D (рис. 11.18).

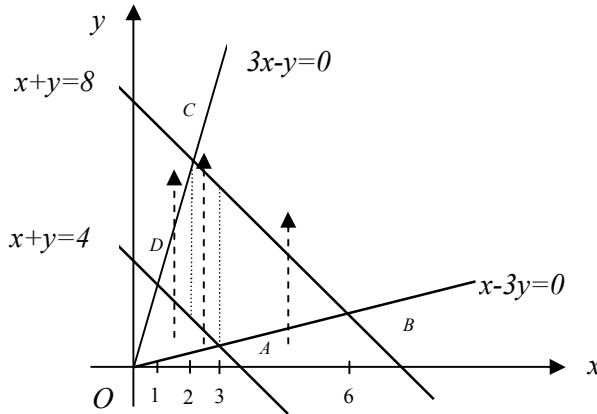


Рисунок 11.18 - Область D

Координати кутових точок області знайдемо внаслідок розв'язання систем рівнянь, попарно поєднуючи рівняння ліній, що обмежують область D :

$$\begin{array}{lll} \begin{cases} x + y = 4; \\ x - 3y = 0; \end{cases} & \begin{cases} 3y + y = 4; \\ x = 3y; \end{cases} & \begin{cases} y = 1; \\ x = 3; \end{cases} & A(3; 1); \\ \begin{cases} x + y = 8; \\ x - 3y = 0; \end{cases} & \begin{cases} 3y + y = 8; \\ x = 3y; \end{cases} & \begin{cases} y = 2; \\ x = 6; \end{cases} & B(6; 2); \\ \begin{cases} x + y = 8; \\ 3x - y = 0; \end{cases} & \begin{cases} x + 3x = 8; \\ y = 3x; \end{cases} & \begin{cases} x = 2; \\ y = 6; \end{cases} & C(2; 6); \\ \begin{cases} x + y = 4; \\ 3x - y = 0; \end{cases} & \begin{cases} x + 3x = 4; \\ y = 3x; \end{cases} & \begin{cases} x = 1; \\ y = 3; \end{cases} & D(1; 3). \end{array}$$

Під час обчислення площі заданої трапеції за допомогою подвійного інтеграла бачимо, що в будь-якому випадку, тобто

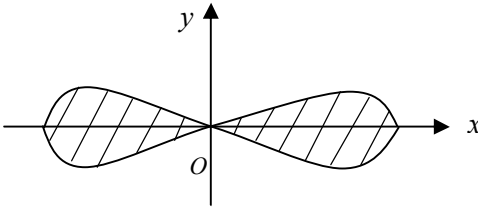
розглядаючи нашу область як вертикальну або горизонтальну, ми вимушені розбити область інтегрування на три частини. Отже, формула (11.22) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_D dx dy = \int_1^2 dx \int_{4-x}^{3x} dy + \int_2^3 dx \int_{4-x}^{8-x} dy + \int_3^6 dx \int_{\frac{x}{3}}^{8-x} dy = \\
 &= \int_1^2 \left(y \Big|_{4-x}^{3x} \right) dx + \int_2^3 \left(y \Big|_{4-x}^{8-x} \right) dx + \int_3^6 \left(y \Big|_{\frac{x}{3}}^{8-x} \right) dx = \\
 &= \int_1^2 (3x - 4 + x) dx + \int_2^3 (8 - x - 4 + x) dx + \\
 &+ \int_3^6 \left(8 - x - \frac{x}{3} \right) dx = \int_1^2 (4x - 4) dx + 4 \int_2^3 dx + \int_3^6 \left(8 - \frac{4x}{3} \right) dx = \\
 &= (2x^2 - 4x) \Big|_1^2 + 4x \Big|_2^3 + \left(8x - \frac{2x^2}{3} \right) \Big|_3^6 = 2 + 4 + 6 = 12 \text{ (од}^2\text{)}
 \end{aligned}$$

Зауваження. Допитливий читач може перевірити результат, скориставшись знаннями, отриманими в курсі середньої школи та в нашому курсі, у процесі вивчення теми «Аналітична геометрія на площині». Ми вже відзначили, що фігура, площу якої ми шукали – трапеція. Формула, за якою обчислюється площа трапеції нам добре відома: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$. Довжини основ трапеції можна знайти як відстань між двома точками за формулою (3.1), а висоту – як відстань від точки до прямої за формулою (3.27).

Приклад 11.9. Обчислити площу фігури, обмеженої лемніскатою $(x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2)$.

Розв'язання: Область D зображена на рисунку 11.19.



Лінія задана неявно. Обчислювати інтеграл у декартовій системі координат проблематично. Перепишемо рівняння лемніскати в полярній системі координат:

Рисунок 11.19 - Область D

$$\begin{aligned}(\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)^2 &= 9(\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi); \\ \rho^4 &= 9\rho^2 \cos 2\varphi; \quad \rho^2 = 9 \cos 2\varphi; \\ \rho &= 3\sqrt{\cos 2\varphi}.\end{aligned}$$

Фігура симетрична, тому достатньо обчислити площу однієї «пелюстки», а потім помножити на 2:

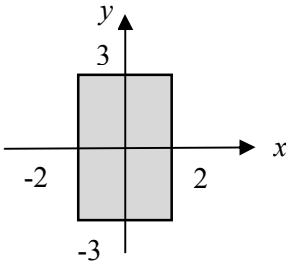
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{3\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho d\rho = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{3\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = \\ &= \frac{9}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{9}{4} \sin 2\varphi \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{9}{4} (1 - (-1)) = \frac{9}{2} (\text{од}^2); \\ S &= 9 (\text{од}^2).\end{aligned}$$

11.5.2 Об'єм циліндричного тіла

При введенні поняття подвійного інтеграла ми вже розв'язували задачу про об'єм циліндричного тіла та отримали відповідну формулу (11.4). Для обчислення об'єму циліндроїду в декартовій системі координат будемо користуватися формулами (11.13) або (11.14), а в полярній – (11.19) – (11.21).

Приклад 11.10. Обчислити об'єм тіла, яке обмежене поверхнями $z = 25 - x^2 - y^2$; $x = \pm 2$; $y = \pm 3$; $z = 0$.

Розв'язання. Для розв'язання задачі нам достатньо побудувати область інтегрування D (рис. 11.20). Область інтегрування – прямокутник, тому вибір порядку інтегрування для нас може бути довільним.



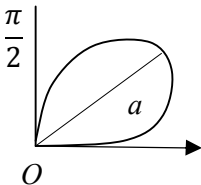
$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^2 dx \int_{-3}^3 (25 - x^2 - y^2) dy = \\ &= \int_{-2}^2 \left(25y - x^2y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-3}^3 dx = \end{aligned}$$

Рисунок 11.20 –
Область D

$$\begin{aligned} &= \int_{-2}^2 (75 - 3x^2 - 9 + 75 - 3x^2 - 9) dx = \int_{-2}^2 (132 - 6x^2) dx = \\ &= (132x - 2x^3) \Big|_{-2}^2 = 2(264 - 16) = 496 \text{ (од}^3\text{)}. \end{aligned}$$

Приклад 11.11. Обчислити об'єм тіла, яке обмежене поверхнями $z = x^2 + y^2$, $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$, $z = 0$.

Розв'язання: Побудувати область інтегрування задану рівнянням у декартовій системі координат для нас буде великою проблемою, тому перейдемо по полярній системі координат:



$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi; \\ (x^2 + y^2)^2 &= 2a^2xy \Rightarrow \\ (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)^2 &= 2a\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi; \\ \rho^2 &= a \sin 2\varphi; \\ \rho &= \sqrt{a \sin 2\varphi}. \end{aligned}$$

Рисунок 11.21
– Область D

Зрозуміло, що підкореневий вираз повинний бути додатнім, тому необхідно виконання умови $\sin 2\varphi \geq 0$:

$$0 \leq 2\varphi \leq \pi; \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Область інтегрування зображена на рисунку 11.21. Обчислимо об'єм тіла в полярній системі координат. Зауважимо, що тепер підінтегральна функція набуває вигляду: $z = \rho^2$.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{a \sin 2\varphi}} \rho^2 \cdot \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{a \sin 2\varphi}} \right) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{8} \left(\varphi - \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2 \pi}{16} \text{ (од}^3\text{)}. \end{aligned}$$

11.5.3 Площа поверхні

Нехай поверхня S задана рівнянням $z = z(x, y)$. Площа гладкої поверхні обчислюється за формулою

$$S = \iint_P \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy, \quad (11.23)$$

де P - проекція цієї поверхні на площину xOy .

Приклад 11.12. Обчислити площу поверхні площини $x + y + z = 6$, яка відсікається площинами $x = 0, y = 0, x = 3, y = 3$.

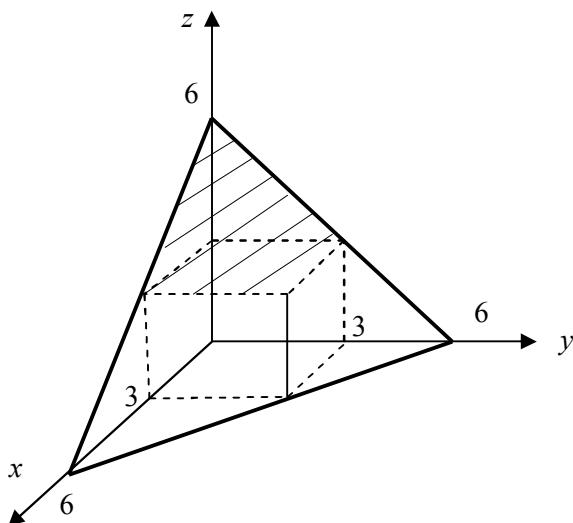


Рисунок 11.22 – Область D

Розв'язання. Побудуємо задані площини (рис. 11.22) та скористаємося формулою (11.23). Для цього обчислимо частинні похідні:

$$z = 6 - x - y; \quad z'_x = -1; \quad z'_y = -1.$$

Проекція заданої поверхні – квадрат, тому подвійний інтеграл обчислимо за формулою (11.15):

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 dx \int_0^3 \sqrt{1+1+1} dy = \sqrt{3} \int_0^3 \left(y \Big|_0^3 \right) dx = 3\sqrt{3} \int_0^3 dx = \\ &= 3\sqrt{3} \cdot x \Big|_0^3 = 9\sqrt{3} \text{ (од}^2\text{)}. \end{aligned}$$

11.5.4 Застосування подвійних інтегралів в задачах механіки

Розглянемо найпоширеніші застосування подвійних інтегралів в задачах механіки:

1. Маса плоскої пластинки змінної щільності.

Розглянемо плоску пластину, розташовану в площині xOy , яка займає область D . Товщину пластинки вважаємо малою, тому зміною щільності за товщиною пластини можна знехтувати.

Поверхневою щільністю пластини в заданій точці називається границя відношення маси площини за умови, що вся площа сконцентрована в заданій точці. Отже, поверхнева щільність буде залежати лише від розташування точки, тобто буде функцією її координат: $\gamma = \gamma(x, y)$.

Якщо б щільність пластини була б постійною ($\gamma = const$), то масу б шукали за формулою

$$m = \gamma S,$$

де S - площа пластини.

Для обчислення маси неоднорідної пластини розіб'ємо область, яку вона займає на часткові $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ із площами відповідно $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ (рис. 11.23). Обираючи довільно в кожній з часткових областей точку $P_i(x_i, y_i)$, будемо вважати, що щільність в усіх точках часткової області постійна й дорівнює $\gamma(x_i, y_i)$ в обраній точці.

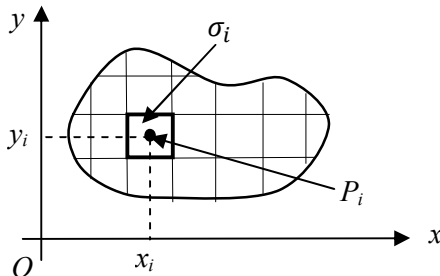


Рисунок 11.23 – Плоска пластина змінної щільності

Масу пластини запишемо у вигляді інтегральної суми

$$m_n = \sum_{i=1}^n \gamma(x_i, y_i) \Delta \sigma_i.$$

Для обчислення точного значення маси перейдемо до границі за умови, що $n \rightarrow \infty$. Звідси маємо:

$$m = \iint_D \gamma(x, y) d\delta. \quad (11.24)$$

Приклад 11.13. Обчислити масу неоднорідної пластини з поверхневою щільністю $\gamma = x^2 + y^2$, яка обмежена лініями $x^2 + y^2 = 8$, $y = x$, $x = \sqrt{2}$, $y > x$.

Розв'язання. Побудуємо область D (рис. 11.24)

Вибір порядку інтегрування, на наш погляд, очевидний – внутрішній інтеграл будемо обчислювати за змінною y . Це обумовлено тим, що в такому випадку нам потрібно обчислювати лише один подвійний інтеграл.

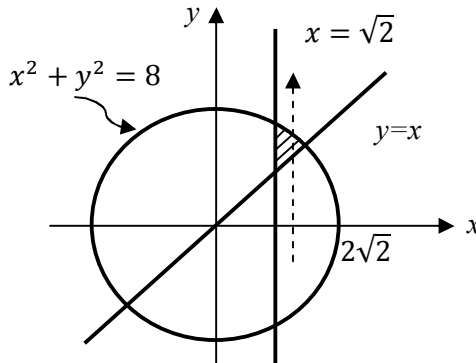


Рисунок 11.24 – Область D

При виборі іншого порядку (спочатку за змінною x , потім - за y) потребує від нас розбиття області інтегрування на 2, і, відповідно, обчислення двох подвійних інтегралів. Для розстановки меж інтегрування, знайдемо координати кутових точок області:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = x \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 = 8 \\ y = x \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 2 \end{cases}.$$

Кутовою точкою заданої області є лише точка $(2; 2)$.

За формулою (11.24) обчислимо масу неоднорідної пластини:

$$\begin{aligned} m &= \int_{\sqrt{2}}^2 dx \int_x^{\sqrt{8-x^2}} (x^2 + y^2) dy = \int_{\sqrt{2}}^2 \left[\left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \right]_x^{\sqrt{8-x^2}} dx = \\ &= \int_{\sqrt{2}}^2 \left(x^2 \sqrt{8-x^2} - x^3 + \frac{1}{3} (\sqrt{8-x^2})^3 - \frac{1}{3} x^3 \right) dx = \\ &= \int_{\sqrt{2}}^2 x^2 \sqrt{8-x^2} dx + \frac{1}{3} \int_{\sqrt{2}}^2 (\sqrt{8-x^2})^3 dx - \frac{4}{3} \int_{\sqrt{2}}^2 x^3 dx = \end{aligned}$$

Перші два інтеграли містять квадратичну ірраціональність у підінтегральному виразі, тому для інтегрування скористаємося підстановкою (8.28); останній з інтегралів – табличний

$$= \left[\begin{array}{ll} x = 2\sqrt{2} \sin t & \text{н: } \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \sin t; \sin t = \frac{1}{2}; t_{\text{н}} = \frac{\pi}{6} \\ dx = 2\sqrt{2} \cos t dt & \text{в: } 2 = 2\sqrt{2} \sin t; \sin t = \frac{1}{\sqrt{2}}; t_{\text{в}} = \frac{\pi}{4} \\ \sqrt{8-x^2} = 2\sqrt{2} \cos t & \end{array} \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= (2\sqrt{2})^4 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t \cos^2 t \, dt + \frac{1}{3} (2\sqrt{2})^4 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 t \cos t \, dt - \\
 &-\frac{4}{3} \frac{x^4}{4} \bigg|_{\sqrt{2}}^2 = 64 \cdot \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t \, dt + \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t)^2 \, dt - \\
 &-\frac{1}{3} (16 - 4) = 16 \cdot \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 4t) \, dt + \\
 &+ \frac{16}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t) \, dt - 4 = \\
 &= 8 \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{16}{3} \left(t + \sin 2t + \frac{1}{2} t + \frac{1}{8} \sin 4t \right) \bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - 4 = \\
 &= \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{16}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} - 4 = \frac{4\pi}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3} = \\
 &= \frac{2}{3} (2\pi + \sqrt{3} + 2) \text{ (од. маси)}
 \end{aligned}$$

Розв'язання цього прикладу в декартовій системі координат досить громіздке. Ураховуючи структуру підінтегрального виразу, спробуємо обчислити його в полярній системі координат. Для цього запишемо рівняння ліній, що обмежують пластину, у полярній системі координат:

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{2}; \quad \rho \cos \varphi = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos \varphi}. \\
 x^2 + y^2 &= 8; \quad \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 8 \quad \Rightarrow \quad \rho = 2\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

З'ясуємо, у яких межах змінюється кут повороту полярного радіуса в області інтегрування:

$$\begin{aligned} x = y; \quad \rho \cos \varphi = \rho \sin \varphi; \quad \operatorname{tg} \varphi = 1 &\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}; \\ \begin{cases} x = \sqrt{2}; \\ x^2 + y^2 = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sqrt{2}; \\ y = \sqrt{6}; \end{cases} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} &\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Поліус перебуває поза межами області, тому для обчислення інтеграла скористаємося формулою (11.19):

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \gamma(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{\frac{\sqrt{2}}{\cos \varphi}}^{2\sqrt{2}} \rho^2 \cdot \rho d\rho = \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{\frac{\sqrt{2}}{\cos \varphi}}^{2\sqrt{2}} d\varphi = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(64 - \frac{4}{\cos^4 \varphi} \right) d\varphi = \end{aligned}$$

Перший з інтегралів – табличний, а другий – потребує підстановки (8.21).

$$\begin{aligned} &= 16 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\varphi}{\cos^4 \varphi} = \left[\begin{array}{ll} u = \operatorname{tg} \varphi & u_{\text{н}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \\ d\varphi = \frac{du}{1+u^2} & u_{\text{в}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \\ \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} & \end{array} \right] = \\ &= 16 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\frac{du}{1+u^2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \right)^4} = \frac{4\pi}{3} - \int_1^{\sqrt{3}} (1+u^2) du = \end{aligned}$$

$$= \frac{4\pi}{3} - \left(u + \frac{u^3}{3}\right) \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}(2\pi + \sqrt{3} + 2) \text{ (од. маси)}.$$

Ми запропонували читачеві два способи розв'язання задачі. Кожен із вас може обрати саме той, який здається зручнішим.

2. Статичні моменти та центр ваги пластини.

Для обчислення статичних моментів неоднорідної пластини відносно координатних осей знов будемо вважати, що маси кожної з відповідних часткових областей сконцентровані в точках $P_i(x_i, y_i)$. Знайдемо статичні моменти отриманої системи матеріальних точок:

$$M_x^{(n)} = \sum_{i=1}^n y_i \gamma(x_i, y_i) \Delta\sigma_i, \quad M_y^{(n)} = \sum_{i=1}^n x_i \gamma(x_i, y_i) \Delta\sigma_i.$$

Перейдемо до границі при $n \rightarrow \infty$ і замінімо інтегральні суми інтегралами, отримаємо:

$$M_x = \iint_D y \cdot \gamma(x, y) d\delta, \quad M_y = \iint_D x \cdot \gamma(x, y) d\delta \quad (11.25)$$

Центром ваги називається точка, яка має таку властивість: якщо в цій точці сконцентрувати масу системи, то її статичний момент відносно будь-якої координатної осі буде дорівнювати відповідному статичному моменту всієї системи.

Отже, за визначенням маємо формули для обчислення координат центра ваги:

$$x_0 = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_D x \cdot \gamma(x, y) d\delta}{\iint_D \gamma(x, y) d\delta}; \quad y_0 = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_D y \cdot \gamma(x, y) d\delta}{\iint_D \gamma(x, y) d\delta}. \quad (11.26)$$

3. Моменти інерції пластинки

Моментом інерції матеріальної точки P з масою m відносно будь-якої з координатних осей називається добуток маси на квадрат відстані точки P від вказаної осі. Метод, за яким визначаються моменти інерції аналогічний методу визначення статичних моментів, тому приведемо остаточні результати. Отже, моменти інерції відносно координатних осей обчислюються за формулами

$$I_x = \iint_D y^2 \cdot \gamma(x, y) d\delta, \quad I_y = \iint_D x^2 \cdot \gamma(x, y) d\delta, \quad (11.27)$$

а момент інерції відносно початку координат за формулою

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \gamma(x, y) d\delta = I_x + I_y. \quad (11.28)$$

Приклад 11.14. Знайти масу однорідної пластини, яка займає область D , обмежену лініями $xu = 8$, $x + y = 9$. Обчислити статичні моменти, координати центра ваги пластини; знайти моменти інерції відносно координатних осей та відносно початку координат.

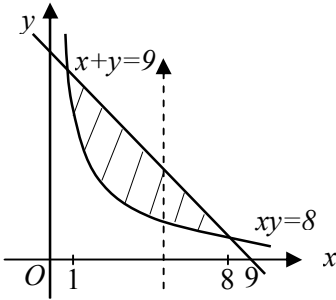


Рисунок 11.25 - Область D

Розв'язання. Побудуємо область D (рис. 11.25).

Знайдемо точки перетину ліній:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+y=9; \\ xy=8; \end{cases} & \begin{cases} y=9-x; \\ x(9-x)=8; \end{cases} \\ x^2-9x+8=0; & \\ x_1=1; \quad x_2=8. & \end{aligned}$$

За умовою пластина однорідна, тому $\gamma(x, y) = 1$.

Масу пластини обчислимо за формулою (11.24):

$$\begin{aligned} m &= \int_1^8 dx \int_{\frac{8}{x}}^{9-x} dy = \int_1^8 \left(y \Big|_{\frac{8}{x}}^{9-x} \right) dx = \int_1^8 \left(9-x-\frac{8}{x} \right) dx = \\ &= \left(9x - \frac{x^2}{2} - 8 \ln x \right) \Big|_1^8 = 31,5 - 8 \ln 8 \text{ (од. маси)}. \end{aligned}$$

Статичні моменти обчислимо за формулами (11.25):

$$\begin{aligned} M_x &= \int_1^8 dx \int_{\frac{8}{x}}^{9-x} y dy = \int_1^8 \left(\frac{y^2}{2} \Big|_{\frac{8}{x}}^{9-x} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^8 \left((9-x)^2 - \left(\frac{8}{x} \right)^2 \right) dx = \frac{1}{2} \int_1^8 \left(81 - 18x + x^2 - \frac{64}{x^2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(81x - 9x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{64}{x} \right) \Big|_1^8 = \frac{343}{6} = 57 \frac{1}{6}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= \int_1^8 dx \int_{\frac{8}{x}}^{9-x} x dy = \int_1^8 \left(xy \left| \frac{8}{x} \right. \right)^{9-x} dx = \\
 &= \int_1^8 \left(x(9-x) - x \cdot \frac{8}{x} \right) dx = \int_1^8 (9x - x^2 - 8) dx = \\
 &= \left(\frac{9x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 8x \right) \Big|_1^8 = \frac{343}{6} = 57 \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

Координати центра ваги знаходимо за формулами (11.26):

$$x_0 = \frac{M_y}{m} = \frac{343}{189-48 \ln 8}; \quad y_0 = \frac{M_x}{m} = \frac{343}{189-48 \ln 8}.$$

Моменти інерції легко знайти за формулами (11.27) – (11.28):

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_1^8 dx \int_{\frac{8}{x}}^{9-x} y^2 dy = \int_1^8 \left(\frac{y^3}{3} \left| \frac{8}{x} \right. \right)^{9-x} dx = \\
 &= \frac{1}{3} \int_1^8 \left((9-x)^3 - \frac{512}{x^3} \right) dx = \frac{1}{3} \left(-\frac{(9-x)^4}{4} + \frac{256}{x^2} \right) \Big|_1^8 = 257,25
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_y &= \int_1^8 dx \int_{\frac{8}{x}}^{9-x} x^2 dy = \int_1^8 \left(x^2 y \left| \frac{8}{x} \right. \right)^{9-x} dx = \\
 &= \int_1^8 \left(x^2(9-x) - x^2 \cdot \frac{8}{x} \right) dx = \int_1^8 (9x^2 - x^3 - 8x) dx = \\
 &= \left(3x^3 - \frac{x^4}{4} - 4x^2 \right) \Big|_1^8 = 257,25; \\
 I_0 &= I_x + I_y = 257,25 + 257,25 = 514,5.
 \end{aligned}$$

Контрольні питання

1. Дайте визначення циліндричному тілу.
2. Дайте визначення подвійному інтегралу
3. Як обчислити об'єм циліндричного тіла за допомогою подвійного інтеграла?
4. Сформулюйте теорему про існування подвійного інтеграла.
5. Сформулюйте та доведіть властивості подвійного інтеграла.
6. Як звести подвійний інтеграл до двократного? За якою умовою зазвичай обирають порядок інтегрування? Чи залежить величина подвійного інтеграла від порядку інтегрування?
7. Як обчислюється подвійний інтеграл в полярних координатах?
8. Назвіть відомі вам застосування подвійного інтеграла.
9. Як обчислити площу плоскої фігури?
10. Запишіть формулу для обчислення площі поверхні циліндричного тіла.
11. Як обчислити масу неоднорідної плоскої пластини?
12. Запишіть формули для обчислення статичних моментів.
13. Дайте визначення центру ваги та запишіть формули для обчислення його координат.
14. Як обчислити моменти інерції неоднорідного тіла відносно координатних осей та центра координат?

Розділ 12 Потрійні інтеграли

12.1 Задача про масу неоднорідного тіла

Нехай дано тіло, яке займає просторову область Ω (рис. 12.1) і відомо, що щільність розподілу маси в заданому тілі є неперервною функцією координат точок тіла $\gamma = \gamma(x, y, z)$.

Розіб'ємо тіло на n довільних частин, об'єми яких позначимо як $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$. Оберемо в кожній частині будь-яку точку $P_i(x_i, y_i, z_i)$. Будемо вважати, що в кожній частковій області щільність постійна та дорівнює її значенню в точці P_i . За цих умов отримаємо наближене значення маси всього тіла у вигляді інтегральної суми

$$m_n = \sum_{i=1}^n \gamma(x_i, y_i, z_i) \Delta v_i.$$

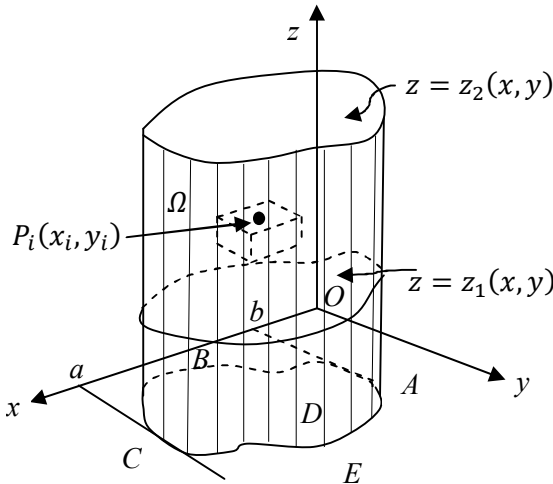


Рисунок 12.1 – Циліндричне тіло

Границя цієї суми за умови, що $n \rightarrow \infty$ і кожне часткове тіло стягується у точку дає формулу для обчислення маси тіла

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \gamma(x_i, y_i, z_i) \Delta v_i = \iiint_{\Omega} \gamma(x, y, z) dv. \quad (12.1)$$

До поняття потрійного інтеграла, крім задачі про масу неоднорідного тіла проводять й низку інших задач. Тому надалі ми будемо розглядати потрійний інтеграл як

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta v_i, \quad (12.2)$$

де $f(x, y, z)$ - довільна неперервна в області Ω функція.

12.2 Властивості потрійних інтегралів

Читач мабуть вже помітив, що всі визначення, термінологія подвійних та потрійних інтегралів співпадають. Тому й відповідні властивості їх аналогічні. Теореми 11.1 -11.5, які ми сформулювали для подвійних інтегралів, мають те саме трактування й для потрійних. Тому зупинимося лише на тих властивостях, які мають принципову різницю.

Зауважимо, що у випадку, коли підінтегральна функція тотожно дорівнює одиниці, потрійний інтеграл виражає об'єм V області Ω :

$$V = \iiint_{\Omega} dv. \quad (12.3)$$

Теорема 12.1 (про оцінку потрійного інтеграла). Якщо функція $f(x, y, z)$ в усіх точках області інтегрування Ω задовольняє нерівностям

$$m \leq f(x, y, z) \leq M,$$

де m і M - найменше та найбільше значення функції $f(x, y, z)$ в області Ω , то

$$mV \leq \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \leq MV, \quad (12.4)$$

де V - об'єм області Ω .

Теорема 12.2 (про середнє значення потрійного інтеграла). Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в області інтегрування Ω , то в цій області існує хоча б одна така точка (ξ, η, χ) , для якої буде виконуватися умова

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = (\xi, \eta, \chi) \cdot V. \quad (12.5)$$

Значення $f(x, y, z)$ в (12.5) називається середнім значенням функції $f(x, y, z)$ у області Ω .

12.3 Обчислення потрійних інтегралів

Обчислення потрійних інтегралів $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$, як і подвійних виконується шляхом зведення до повторного, у цьому разі, трикратного інтеграла. Опишемо правила зведення потрійних інтегралів до трикратних у декартовій, сферичній та циліндричній системах координат.

12.3.1 Обчислення потрійних інтегралів у декартовій системі координат

Нехай дано потрійний інтеграл $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$ від функції $f(x, y, z) dv$. Область Ω будемо розглядати в декартовій системі координат $Oxyz$. Розіб'ємо область інтегрування Ω площинами, паралельними координатним площинам. Отримані часткові області будуть паралелепіпедами з гранями, які паралельні площинам xOy, xOz, yOz . Елемент об'єму буде дорівнювати добутку диференціалів змінних інтегрування:

$$dv = dx dy dz.$$

У зв'язку з цим потрійний інтеграл набуде вигляду

$$I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz.$$

Сформулюємо тепер правило обчислення такого інтеграла. Будемо вважати, що область інтегрування Ω має вигляд, як зображено на рисунку 12.1. Опишемо навколо Ω циліндричну поверхню з твірною, яка перпендикулярна площині xOy . Рівняння нижньої частини поверхні – $z = z_1(x, y)$, рівняння верхньої – $z = z_2(x, y)$. Циліндрична поверхня, яку ми побудували, відсікає на площині xOy область D , яка становить ортогональну проекцію просторової області Ω на вказану координатну площину.

Домовимося спочатку проводити інтегрування по напрямку осі Oz . Для цього функція $f(x, y, z)$ буде інтегруватися по відрітку прямої всередині області Ω , яка проходить через деяку точку $P(x, y)$ області D . При фіксованих x і y змінна інтегрування z змінюється від $z_1(x, y)$ - аплікати «входу», до $z_2(x, y)$ - аплікати «виходу». Результат такого інтегрування – функція змінних (x, y) , позначимо її як

$$F(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

При знаходженні функції $F(x, y)$ x і y вважалися сталими величинами.

Ми отримаємо значення шуканого потрійного інтеграла, якщо обчислимо інтеграл від функції $F(x, y)$ по області D , тобто обчислимо подвійний інтеграл

$$\iint_D F(x, y) dx dy.$$

Отже, потрійний інтеграл можна подати у вигляді

$$I = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Зводячи надалі подвійний інтеграл по області D до повторного, остаточно отримаємо

$$I = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (12.6)$$

Зауваження 1. Порядок інтегрування можна змінити згідно з приведеною процедурою.

Зауваження 2. Якщо областю інтегрування Ω є паралелепіпед із гранями, паралельними до координатних площин, то межі інтегрування стали в усіх трьох інтегралах:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_l^k f(x, y, z) dz. \quad (12.7)$$

У такому випадку інтегрування можна проводити в будь-якому порядку, при цьому межі інтегрування не зміняться.

Зауваження 3. У випадку, коли підінтегральна функція $f(x, y, z) \equiv 1$, інтеграл виражає об'єм області Ω :

$$V = \iiint_{\Omega} dx dy dz. \quad (12.8)$$

Приклад 12.1. Обчислити потрійний інтеграл, якщо область інтегрування обмежена площиною $x + y + z = 1$ і координатними площинами

$$\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(3x + 2y + z - 4)^4}.$$

Розв'язання. Побудуємо область Ω (рис. 12.2). Область інтегрування – трикутна піраміда. Поверхнею «входу» слугує координатна площина xOy , поверхнею «виходу» - площина $z = 1 - x - y$. Проекцією тіла Ω на xOy є трикутник.

Розставляючи межі інтегрування спочатку за змінною u , потім – за змінною x , запишемо потрійний інтеграл у вигляді трикратного та обчислимо його за формулою (12.6):

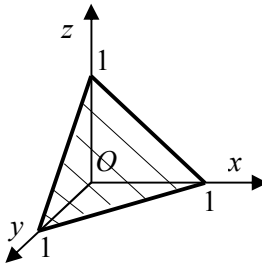


Рисунок 12.2 - Область Ω

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} \frac{dx \, dy \, dz}{(3x + 2y + z - 4)^4} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dx \, dy \, dz}{(3x + 2y + z - 4)^4} \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(-\frac{1}{3(3x + 2y + z - 4)^3} \Big|_0^{1-x-y} \right) dy = \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(-\frac{1}{3(2x + y - 3)^3} + \frac{1}{3(3x + 2y - 4)^3} \right) dy = \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\left(\frac{1}{2(2x + y - 3)^2} - \frac{1}{4(3x + 2y - 4)^2} \right) \Big|_0^{1-x} \right) dx = \\
 &= \frac{1}{12} \int_0^1 \left(\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{(2x-3)^2} + \frac{1}{(3x-4)^2} \right) dx = \\
 &= \frac{1}{12} \left(-\frac{1}{x-2} + \frac{1}{2x-3} - \frac{1}{3(3x-4)} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{144}.
 \end{aligned}$$

Приклад 12.2. Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_{\Omega} (7x - 5y + 3z + 1) dx \, dy \, dz,$$

якщо область інтегрування – паралелепіпед $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

Розв’язання. Побудуємо область Ω (рис. 12.3). За формулою (12.7) розставимо межі інтегрування та обчислимо потрійний інтеграл:

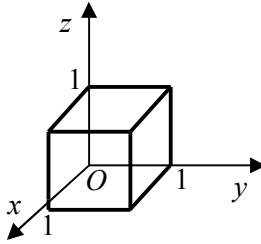


Рисунок 12.3 - Область Ω

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (7x - 5y + 3z + 1) dz = \\
 & \int_0^1 dx \int_0^1 \left(7xz - 5yz + \frac{3z^2}{2} + z \right) \Big|_0^1 dy = \\
 & = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(7x - 5y + \frac{5}{2} \right) dy = \int_0^1 \left(\left(7xy - \frac{5y^2}{2} + \frac{3}{2}y \right) \Big|_0^1 \right) dx = \\
 & = \int_0^1 7x dx = \frac{7x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{7}{2} = 3,5.
 \end{aligned}$$

12.3.2 Обчислення потрійних інтегралів в циліндричній системі координат

Розглянемо циліндричну (ρ, φ, z) систему координат, у якій розташування точки M у просторі визначається полярними координатами (ρ, φ) її проекції P на площину xOy та її аплікатой z .

Обираючи взаємне розташування осей координат, як вказано на рисунку 12.4, установимо зв'язок між декартовими та циліндричними координатами точки M :

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \quad (12.9)$$

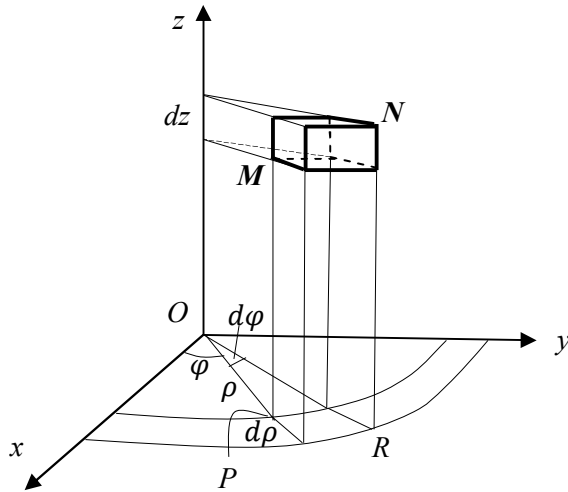


Рисунок 12.4 – Циліндрична система координат

Розіб'ємо область інтегрування Ω на часткові області v_i трьома системами координатних поверхонь, а саме: $\rho = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $z = \text{const}$ якими будуть відповідно кругові циліндричні поверхні, віссю яких є вісь апікат, півплощини, які проходять через вісь Oz , і площини, паралельні площини xOy . Частковими областями v_i є прямі циліндри MN (рис. 12.4). За формулою, за якою обчислюють об'єм циліндра, тобто з добутку площі основи на висоти, отримаємо вираз для елемента об'єму часткової області:

$$dv = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz. \quad (12.10)$$

Перетворення потрійного інтеграла у циліндричні координати проводиться аналогічно до перетворення подвійного інтеграла у полярні координати (12.9), (12.10):

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz. \quad (12.11)$$

У випадку, коли підінтегральна функція $f(x, y, z) \equiv 1$, інтеграл виражає об'єм області Ω :

$$V = \iiint_{\Omega} \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz. \quad (12.12)$$

Обчислення потрійних інтегралів у циліндричних координатах проводиться аналогічно обчисленню інтегралів у декартових координатах.

Зауваження. Якщо областю інтегрування є циліндр $\rho \leq R$, $0 \leq z \leq h$, то межі інтегрування трикратного інтеграла сталі й не змінюються при заміні порядку інтегрування:

$$I = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho \, d\rho. \quad (12.13)$$

Приклад 12.3. Обчислити об'єм прямого циліндра радіуса R та висотою h .

Розв'язання. Скористаємося формулами (12.12), (12.13):

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho \, d\rho = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2} \Big|_0^R \right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} R^2 \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2} R^2 \int_0^h \left(\varphi \Big|_0^{2\pi} \right) dz = \pi R^2 \int_0^h dz = \\ &= \pi R^2 \cdot z \Big|_0^h = \pi R^2 h \text{ (од}^3\text{)} \end{aligned}$$

Отже, ми отримали добре відому нам із курсу середньої школи формулу для обчислення об'єму прямого циліндра.

Приклад 12.4. Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z)^2 dx dy dz,$$

виконавши перехід до циліндричних координат, якщо область інтегрування обмежена поверхнями $x^2 + y^2 = a^2$, $z = a$, $z = c$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (12.11), попередньо переписавши рівняння поверхні, що обмежує фігуру, у циліндричних координатах:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = a^2 &\Rightarrow \\ \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = a^2; \\ \rho &= a. \end{aligned}$$

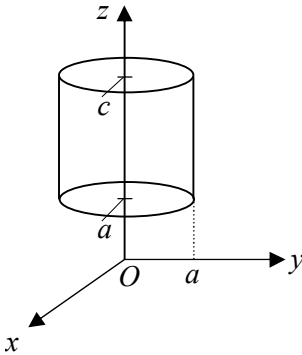


Рисунок 12.5 -
Круговий циліндр

Бачимо, що область інтегрування – прямий круговий циліндр (рис. 12.5). Обчислимо потрійний інтеграл:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^c dz \int_0^a (\rho^2 + z)^2 \rho d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^c dz \int_0^a (\rho^5 + 2\rho^3 z + \rho z^2) d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^c \left(\left(\frac{\rho^6}{6} + \frac{\rho^4}{2} z + \frac{\rho^2 z^2}{2} \right) \Big|_0^a \right) dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^c \left(\frac{a^6}{6} + \frac{a^4}{2} z + \frac{a^2 z^2}{2} \right) dz = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{a^6}{6} z + \frac{a^4 z^2}{4} + \frac{a^2 z^3}{6} \right) \Big|_a^c \right) d\varphi = \\
 &= \left(\frac{a^6 c}{6} + \frac{a^4 c^2}{4} + \frac{a^2 c^3}{6} - \frac{a^7}{6} - \frac{a^6}{4} - \frac{a^5}{6} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi = \\
 &= \frac{\pi}{6} (2a^6 c + 3a^4 c^2 + 2a^2 c^3 - 2a^7 - 3a^6 - 2a^5).
 \end{aligned}$$

12.3.3 Обчислення потрійних інтегралів у сферичній системі координат

Розглянемо сферичну систему координат (ρ, θ, φ) , в якій розташування точки M у просторі визначається відстанню її ρ від початку координат, кутом θ між радіусом-вектором точки та віссю Oz , і кутом φ між проекцією радіус-вектора точки на площину xOy та віссю Ox (рис. 12.6). При цьому θ може змінюватися в межах від 0 до π , а φ - від 0 до 2π .

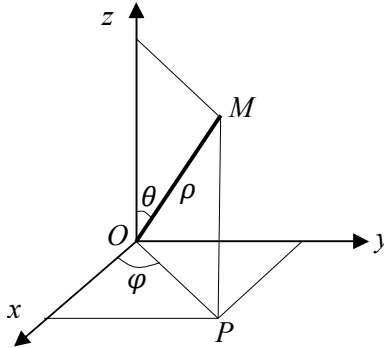


Рисунок 12.6 – Сферична система координат

Встановимо зв'язок між сферичними та декартовими координатами. За рис. 12.6 маємо

$$MP = \rho \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \rho \cos \theta, \quad OP = \rho \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \rho \sin \theta, \\ x = OP \cos \varphi, \quad y = OP \sin \varphi.$$

Звідси

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \theta \cos \varphi; \\ y &= \rho \sin \theta \sin \varphi; \\ z &= \rho \cos \theta. \end{aligned} \quad (12.14)$$

Розіб'ємо область інтегрування Ω на часткові області v_i трьома системами координатних поверхонь, а саме: $\rho = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, якими будуть відповідно сфери з центром у початку координат, півплощини, які проходять через вісь аплікат, і конуси, які мають вершини в початку координат і з осями, які співпадають з однією з полувісей Oz .

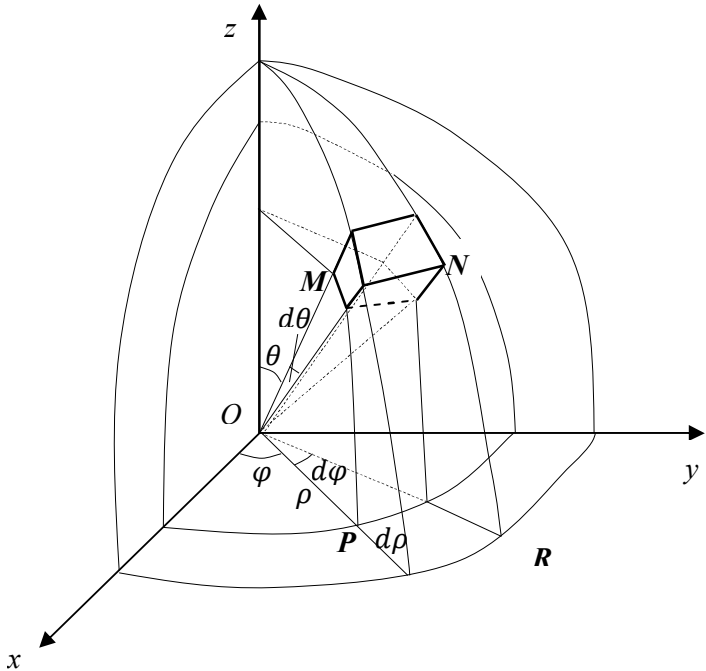


Рисунок 12.7 – Зв'язок між сферичною та декартовою системами координат

Частинними областями v_i є «шестигранники» (рис. 12.7). Уважаючи, що їхній максимальний розмір прямує до нуля, будемо розглядати ці шестигранники як прямокутні паралелепіпеди з вимірами: $d\rho$ у напрямі полярного радіуса, $\rho d\theta$ у напрямі меридіана, $\rho \sin \theta d\varphi$ у напрямі паралелі. Звідси отримаємо формулу, яка описує елементарний об'єм області інтегрування:

$$dv = \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta. \quad (12.15)$$

Виконуючи заміну в потрібному інтегралі за формулами (12.14), (12.15), отримаємо

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \\ &= \iiint_{\Omega} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta. \end{aligned} \quad (12.16)$$

Зауваження 1. Особливо зручно користуватися сферичними координатами під час обчислення потрібних інтегралів у випадку, коли область інтегрування – куля з центром в початку координат або кульове кільце. В такому випадку потрібний інтеграл набуває вигляду:

$$\begin{aligned} & - \text{ для кулі} \\ & \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 d\rho; \end{aligned} \quad (12.17)$$

- для кульового кільця

$$\int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 d\rho. \quad (12.18)$$

Зауваження 2. Якщо підінтегральна функція у формулі (12.16) дорівнює 1, за допомогою потрібного інтеграла можна обчислити об'єм тіла:

$$V = \iiint_{\Omega} \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta. \quad (12.19)$$

Приклад 12.5. Обчислити об'єм кулі радіуса R .

Розв'язання. За формулами (12.16), (12.17) маємо:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 d\rho &= \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^3}{3} \Big|_0^R \right) d\varphi = \\ &= \frac{R^3}{3} \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^3}{3} \int_0^{\pi} \left(\varphi \Big|_0^{2\pi} \right) \sin \theta \, d\theta = \\ &= \frac{2\pi R^3}{3} \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta = -\frac{2\pi R^3}{3} \cos \theta \Big|_0^{\pi} = -\frac{2\pi R^3}{3} (-1 - 1) = \\ &= \frac{4\pi R^3}{3} \text{ (од}^3\text{)}. \end{aligned}$$

Отже, ми знов отримали добре відому з курсу середньої школи формулу.

Приклад 12.6. Обчислити потрібний інтеграл

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3} dx dy dz,$$

виконуючи перехід до сферичних координат, якщо область інтегрування – куля $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

Розв’язання. За формулами (12.14) виконаємо перехід до сферичної системи координат, та обчислимо трикратний інтеграл:

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3} dx dy dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left(\frac{\rho^6}{6} \Big|_0^R \right) \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{R^6}{6} \int_0^{2\pi} \left((-\cos \theta) \Big|_0^{\pi} \right) d\varphi = \frac{R^6}{6} \cdot 2 \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^6}{3} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi R^6}{3}. \end{aligned}$$

12.3.4 Застосування потрійних інтегралів

Ми вже познайомилися із одним з найважливіших застосувань потрійного інтеграла – обчислення об’єму тіла. Відповідні формули ми вже отримали для потрійних інтегралів у декартовій (12.8), циліндричній (12.12) та сферичній (12.19) системах координат.

Застосування потрійних інтегралів до обчислення маси неоднорідного тіла, статичних моментів і моментів інерції просторових тіл базується на тих же принципах, що й застосування подвійних інтегралів для обчислення відповідних характеристик плоских неоднорідних тіл. Тому ми приведемо остаточні формули.

Просторовою щільністю тіла в заданій точці називається границя відношення маси площини за умови, що вся площа сконцентрована в заданій точці. Таким чином, просторова щільність буде залежати лише від розташування точки, тобто буде функцією її координат: $\gamma = \gamma(x, y, z)$.

Якщо б щільність тіла була б постійною ($\gamma = \text{const}$), то масу б шукали за формулою

$$m = \gamma V.$$

У випадку неоднорідного тіла маса має бути обчислена за формулою:

$$m = \iiint_{\Omega} \gamma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz. \quad (12.20)$$

Для обчислення координат центра мас необхідно обчислити статичні моменти відносно координатних площин xOy, yOz, xOz . Повторюючи міркування, які ми наводили у п. 11.15.4, отримаємо формули для обчислення статичних моментів

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_{\Omega} x \cdot \gamma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz; \\ M_{xz} &= \iiint_{\Omega} y \cdot \gamma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz; \\ M_{xy} &= \iiint_{\Omega} z \cdot \gamma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz; \end{aligned} \quad (12.21)$$

і координат центра мас

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{m}; \quad y_0 = \frac{M_{xz}}{m}; \quad z_0 = \frac{M_{xy}}{m}$$

або

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} x \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz; \\
 y_0 &= \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} y \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz; \\
 z_0 &= \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} z \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz.
 \end{aligned} \tag{12.22}$$

Аналогічно отримаємо формули для обчислення моментів інерції відносно координатних площин

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= \iiint_{\Omega} z^2 \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz; \\
 I_{yz} &= \iiint_{\Omega} x^2 \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz; \\
 I_{xz} &= \iiint_{\Omega} y^2 \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz;
 \end{aligned} \tag{12.23}$$

та відносно початку координат

$$I_0 = I_{yz} + I_{xz} + I_{xy} = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz. \tag{12.24}$$

Приклад 12.7. Обчислити масу, статичні моменти відносно координатних площин, координати центра ваги, моменти інерції відносно координатних площин та відносно початку координат неоднорідного тіла, обмеженого поверхнями

$3x + 2z = 4, x = 0, z = 0, y = 0, y = 4$, якщо просторова щільність дорівнює $\gamma(x, y, z) = xyz$.

Розв'язання. Побудуємо тіло Ω (рис. 12.8).

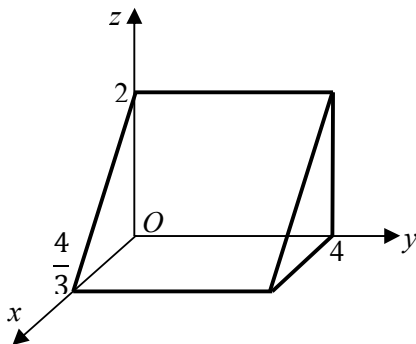


Рисунок 12.8 - Тіло Ω

Скористаємося формулами (12.20) – (12.24) для обчислення:

- маси неоднорідного тіла

$$m = \int_0^{\frac{4}{3}} dx \int_0^4 dy \int_0^{2-\frac{3}{2}x} xyz \, dz = \int_0^{\frac{4}{3}} dx \int_0^4 \left(\frac{xyz^2}{2} \Big|_0^{2-\frac{3}{2}x} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{4}{3}} dx \int_0^4 \left(4x - 6x^2 + \frac{9}{4}x^3 \right) y \, dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{4}{3}} \left(\left(4x - 6x^2 + \frac{9}{4}x^3 \right) \frac{y^2}{2} \Big|_0^4 \right) dx =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{4}{3}} \left(4x - 6x^2 + \frac{9}{4}x^3 \right) dx = 4 \left(2x^2 - 2x^3 + \frac{9x^4}{16} \right) \Bigg|_0^{\frac{4}{3}} = \frac{64}{27}$$

(од. маси);

- статичних моментів відносно координатних площин

$$M_{yz} = \int_0^{\frac{4}{3}} dx \int_0^4 dy \int_0^{2-\frac{3}{2}x} x^2 yz \, dz = \int_0^{\frac{4}{3}} dx \int_0^4 \left(\frac{x^2 y z^2}{2} \Bigg|_0^{2-\frac{3}{2}x} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{4}{3}} dx \int_0^4 \left(4x^2 - 6x^3 + \frac{9}{4}x^4 \right) y \, dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{4}{3}} \left(\left(4x^2 - 6x^3 + \frac{9}{4}x^4 \right) \frac{y^2}{2} \Bigg|_0^4 \right) dx =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{4}{3}} \left(4x^2 - 6x^3 + \frac{9}{4}x^4 \right) dx = 4 \left(\frac{4x^3}{3} - \frac{3x^4}{2} + \frac{9x^5}{20} \right) \Bigg|_0^{\frac{4}{3}} = \frac{512}{405};$$

$$M_{xz} = \int_0^{\frac{4}{3}} dx \int_0^4 dy \int_0^{2-\frac{3}{2}x} x y^2 z \, dz = \int_0^{\frac{4}{3}} dx \int_0^4 \left(\frac{x y^2 z^2}{2} \Bigg|_0^{2-\frac{3}{2}x} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{4}{3}} dx \int_0^4 \left(4x - 6x^2 + \frac{9}{4}x^3 \right) y^2 \, dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{4}{3}} \left(\left(4x - 6x^2 + \frac{9}{4}x^3 \right) \frac{y^3}{3} \Bigg|_0^4 \right) dx =$$

$$= \frac{32}{3} \int_0^{\frac{4}{3}} \left(4x - 6x^2 + \frac{9}{4}x^3 \right) dx = \frac{32}{3} \left(2x^2 - 2x^3 + \frac{9x^4}{16} \right) \Big|_0^{\frac{4}{3}} = \frac{512}{81}$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \int_0^{\frac{4}{3}} dx \int_0^4 dy \int_0^{2-\frac{3}{2}x} xyz^2 dz = \int_0^{\frac{4}{3}} dx \int_0^4 \left(\frac{xy^2z^3}{3} \Big|_0^{2-\frac{3}{2}x} \right) dy = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{4}{3}} dx \int_0^4 \left(8x - 18x^2 + \frac{27}{2}x^3 - \frac{27}{8}x^4 \right) y dy = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{4}{3}} \left(\left(8x - 18x^2 + \frac{27}{2}x^3 - \frac{27}{8}x^4 \right) \frac{y^2}{2} \Big|_0^4 \right) dx = \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{4}{3}} \left(8x - 18x^2 + \frac{27}{2}x^3 - \frac{27}{8}x^4 \right) dx = \\ &= \frac{8}{3} \left(4x^2 - 6x^3 + \frac{27}{8}x^4 - \frac{27}{40}x^5 \right) \Big|_0^{\frac{4}{3}} = \frac{256}{135}; \end{aligned}$$

- координати центра мас:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{M_{yz}}{m} = \frac{27}{64} \cdot \frac{512}{405} = \frac{8}{15}; \\ y_0 &= \frac{M_{xz}}{m} = \frac{27}{64} \cdot \frac{512}{81} = \frac{8}{3}; \\ z_0 &= \frac{M_{xy}}{m} = \frac{27}{64} \cdot \frac{256}{135} = \frac{4}{5}; \\ &P\left(\frac{8}{15}; \frac{8}{3}; \frac{4}{5}\right); \end{aligned}$$

- моменти інерції відносно координатних площин та початку координат:

$$\begin{aligned}
 I_{yz} &= \int_0^{\frac{4}{3}} dx \int_0^4 dy \int_0^{2-\frac{3}{2}x} x^3 y z dz = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{4}{3}} dx \int_0^4 \left(x^3 y z^2 \Big|_0^{2-\frac{3}{2}x} \right) dy = \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{4}{3}} \left(\left(4x^3 - 6x^4 + \frac{9}{4}x^5 \right) y^2 \Big|_0^4 \right) dx = \\
 &= 4 \left(x^4 - \frac{6}{5}x^5 + \frac{3}{8}x^6 \right) \Big|_0^{\frac{4}{3}} = \frac{1024}{1215};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{xz} &= \int_0^{\frac{4}{3}} dx \int_0^4 dy \int_0^{2-\frac{3}{2}x} x y^3 z dz = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{4}{3}} dx \int_0^4 \left(x y^3 z^2 \Big|_0^{2-\frac{3}{2}x} \right) dy = \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{4}{3}} \left(\left(4x - 6x^2 + \frac{9}{4}x^3 \right) y^4 \Big|_0^4 \right) dx = \\
 &= 32 \left(2x^2 - 2x^3 + \frac{9}{16}x^4 \right) \Big|_0^{\frac{4}{3}} = \frac{512}{27};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= \int_0^{\frac{4}{3}} dx \int_0^4 dy \int_0^{2-\frac{3}{2}x} x y z^3 dz = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{4}{3}} dx \int_0^4 \left(x y z^4 \Big|_0^{2-\frac{3}{2}x} \right) dy = \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{4}{3}} \left(\left(\frac{81}{16}x^5 - 27x^4 + 54x^3 - 48x^2 + 16x \right) y^2 \Big|_0^4 \right) dx =
 \end{aligned}$$

$$= 2 \left(\frac{27}{32} x^6 - \frac{27}{5} x^5 + \frac{27}{2} x^4 - 16x^3 + 8x^2 \right) \Bigg|_0^{\frac{4}{3}} = \frac{256}{135};$$

$$I_0 = I_{yz} + I_{xz} + I_{xy} = \frac{1024}{1215} + \frac{512}{27} + \frac{256}{135} = \frac{26368}{1215}.$$

Контрольні питання

1. Сформулюйте задачу про масу неоднорідного тіла.
2. Дайте визначення потрійному інтегралу.
3. Які властивості потрійного інтеграла ви знаєте?
4. Як обчислити потрійний інтеграл у декартовій системі координат?
5. Як звести потрійний інтеграл до трикратного в циліндричній системі координат?
6. Сформулюйте правило обчислення потрійного інтеграла в сферичній системі координат.
7. Які застосування потрійного інтеграла ви знаєте?
8. Запишіть формули для обчислення статичних моментів відносно координатних площин та координат центра мас.
9. Як обчислюються моменти інерції відносно координатних площин неоднорідного тіла?

Розділ 13 КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

13.1 Задача про масу просторової лінії

Нехай на дузі l просторової кривої B_1B_n (рис. 13.1) неперервно розподілена речовина з густиною $\gamma(M)$, яка залежить від положення точки $M(x, y, z)$ на кривій. Розіб'ємо дугу на елементарні частини Δl_k . Будемо припускати, що в межах кожної елементарної дуги густина речовини стала і дорівнює $\gamma(M_k)$, де M_k - будь-яка точка елементарної дуги.

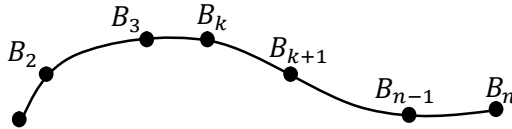


Рисунок 13.1 – Просторова лінія

Маса кожної елементарної частини дуги знаходиться за формулою

$$\Delta m_k = \gamma(M_k) \Delta l_k.$$

Маса всієї дуги наближено дорівнює

$$m_n = \sum_{k=1}^n \Delta m_k = \sum_{k=1}^n \gamma(M_k) \Delta l_k.$$

Точне значення маси матеріальної дуги можна отримати в результаті граничного переходу при $n \rightarrow \infty$, за умови, що довжина найбільшого інтервалу прямує до нуля:

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \gamma(M_k) \Delta l_k. \quad (13.1)$$

13.2 Задача про роботу силового поля

Нехай в області D площини xOy задано силове поле, тобто на будь-яку матеріальну точку, яка опиниться в області D , діє сила \vec{F} , яка визначена в усіх точках області D . Область може співпадати з координатною площиною xOy або займати деяку її частину.

Сила \vec{F} залежить від точки, у якій вона прикладається, тому її можна записати у вигляді

$$\vec{F}(x, y) = \vec{F}(x, y),$$

де x і y - координати точки, у якій прикладена сила. Зручніше буде задавати силу, якщо відомі її проекції на осі координат - $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ відповідно. Запишемо силу у вигляді

$$\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}.$$

Нехай під дією сил поля матеріальна точка рухається по деякій лінії l , яка розташована в області D і з'єднує точки B_1 і B_n (рис. 13.2). Обчислимо роботу, яку виконає сила \vec{F} із переміщення точки.

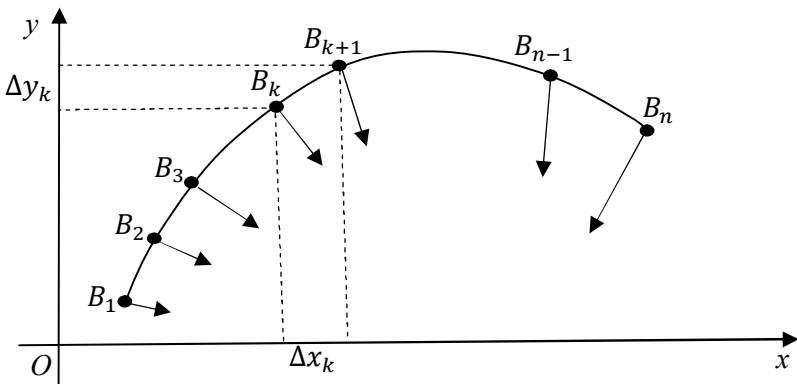


Рисунок 13.2 – Переміщення матеріальної точки по лінії l під дією сили \vec{F}

Розіб'ємо лінію l на n частин точками B_1, B_2, \dots, B_n . Замінімо кожен криволінійний інтервал $B_k B_{k+1}$ прямолінійним вектором переміщення $\overrightarrow{B_k B_{k+1}}$. Домовимося, що в кожному частковому інтервалі сила стала та дорівнює силі, яка приложена в точці B_k :

$$\vec{F}_k = P(x_k, y_k)\vec{i} + Q(x_k, y_k)\vec{j}.$$

За відомою формулою, робота з переміщення матеріальної точки дорівнює скалярному добутку векторів сили й вектора переміщення. Проекції вектора переміщення на осі координат дорівнюють відповідно $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ і $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, а проекції вектора сили ми вже встановили. Тому робота силового поля з переміщення матеріальної точки в частковому інтервалі дорівнює

$$\Delta A_k = P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k$$

Якщо просумуємо отримані вирази по всіх часткових інтервалах, отримаємо вираз для шуканої роботи:

$$A_n = \sum_{k=1}^n P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k.$$

Переходячи до границі при $n \rightarrow \infty$ і вважаючи, що довжина найбільшого інтервалу прямує до нуля, ми отримаємо шукане значення роботи:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k. \quad (13.2)$$

13.3 Визначення криволінійних інтегралів

Розглянемо тепер задачу в загальному випадку. Нехай l - кусково-гладка крива з початком в точці A і кінцем в точці B (рис. 13.3), на якій визначені і неперервні скалярна функція $F(M)$ і векторна функція $\vec{F}(M)$, яка має проєкції $P(M), Q(M), R(M)$ на осі декартової системи координат.

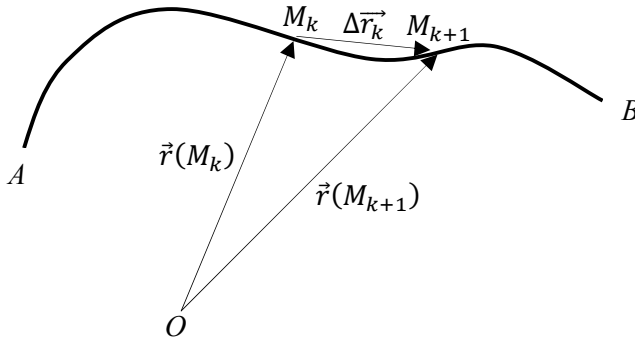


Рисунок 13.3 – Кусково-гладка крива

На лінії l обираються довільні точки $M_k(x_k, y_k, z_k)$. Тобто криволінійний відрізок розбивається на n частин $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$. Нехай N_k - довільна точка на елементарному відрізьку $M_k M_{k+1}$. Суми двох типів

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^n F(N_k) \Delta l_k ; \quad (13.3)$$

$$\beta_n = \sum_{k=1}^n [P(N_k) \Delta x_k + Q(N_k) \Delta y_k + R(N_k) \Delta z_k] \quad (13.4)$$

називаються *інтегральними сумами розбиття*, де $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \Delta y_k = y_{k+1} - y_k, \Delta z_k = z_{k+1} - z_k$.

Визначення 13.1. Якщо існує границя інтегральної суми α_n при $n \rightarrow \infty$ і довжині найбільшого інтервалу, що прямує до нуля, яка не залежить від способу розбиття дуги AB точками M_k на частинні інтервали й вибору точок N_k в середині їх, то ця границя називається **криволінійним інтегралом першого роду** від функції $F(M)$ по дузі AB і позначається як

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n F(N_k) \Delta l_k = \int_{AB} F(M) dl = \int_{AB} F(x, y, z) dl = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n F(N_k) \Delta l_k. \quad (13.5)$$

Визначення 13.2. Якщо існує границя інтегральної суми β_n при $n \rightarrow \infty$ і довжині найбільшого інтервалу, що прямує до нуля, яка не залежить від способу розбиття дуги AB точками M_k на частинні інтервали й вибору точок N_k у середині їх, то ця границя називається **криволінійним інтегралом другого роду** від функції $\vec{F}(M)$ по дузі AB і позначається як

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [P(N_k) \Delta x_k + Q(N_k) \Delta y_k + R(N_k) \Delta z_k] = \\ &= \int_{AB} \vec{F}(M) d\vec{r} = \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Порівняємо отримані формули (13.5), (13.6) з формулами (13.1), (13.2), які були виведені внаслідок розв'язання прикладних задач про масу просторової лінії та роботи сили по переміщенню точки, робимо висновок про їхню однозначну відповідність.

Отже, маса просторової лінії може бути обчислена за допомогою криволінійного інтеграла першого роду:

$$m = \int_{AB} \gamma(M) dl; \quad (13.7)$$

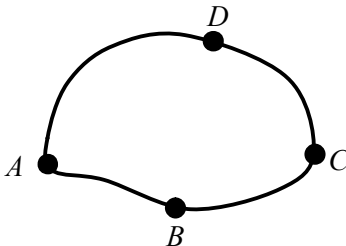
а робота з переміщення матеріальної точки – за допомогою криволінійного інтеграла другого роду:

$$A = \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz. \quad (13.8)$$

13.4 Властивості криволінійних інтегралів

Властивості криволінійних інтегралів випливають з їхнього визначення й доводяться за тим самим алгоритмом, що й відповідні властивості визначених інтегралів. Крім того, криволінійні інтеграли першого та другого роду зводяться до визначеного інтеграла, що ми покажемо у наступному розділі. Тому загалом їхні властивості ідентичні. Вкажемо лише ті, що різняться.

- Криволінійні інтеграли першого й другого роду не залежать від вибору початкової точки на замкнутому контурі.***



Розглянемо замкнений контур $ABCD A$ (рис. 13.4). Якщо прийняти за початкову точку A , то дістанемо

$$\int_{ABCD A} = \int_{ABC} + \int_{CDA}.$$

Якщо прийняти за початкову точку C , то отримаємо

Рисунок 13.4 – Замкнений контур

$$\int_{CDABC} = \int_{CDA} + \int_{ABC}.$$

Порівняємо праві частини отриманих рівностей та зробимо висновок про рівність їх лівих частин.

Під час обчислення криволінійних інтегралів другого роду необхідно враховувати напрям інтегрування, що обумовлено векторною природою підінтегральної функції. Якщо крива L - замкнена, додатним напрямом обходу замкненого контуру умовилися називати напрям проти ходу годинникової стрілки, тобто напрям, при якому внутрішня область залишається ліворуч відносно точки, що виконує обхід. Протилежний обхід називається від'ємним. Замкнений контур інтегрування позначається символом \oint_L .

2. **Теорема 13.1 (теорема про середнє).** Для криволінійного інтеграла першого роду справедлива така властивість.

Якщо функція $F(M)$ визначена та неперервна на гладкій дузі AB , включаючи її кінці, то на такій дузі знайдеться хоча б одна така точка M^* , для якої виконується таке

$$\int_{AB} F(M)dl = F(M^*) \cdot L_{AB},$$

де L_{AB} - довжина дуги AB , а $F(M^*)$ - середнє значення підінтегральної функції на довжині шляху інтегрування.

3. **Теорема 13.2.** Якщо область D , обмежену замкненою лінією L , розбити на дві частини D_1 і D_2 , то криволінійний інтеграл по всій лінії L дорівнює сумі інтегралів у тому самому напрямі, обчислених по лініям L_1 і L_2 , що обмежують області D_1 і D_2 .

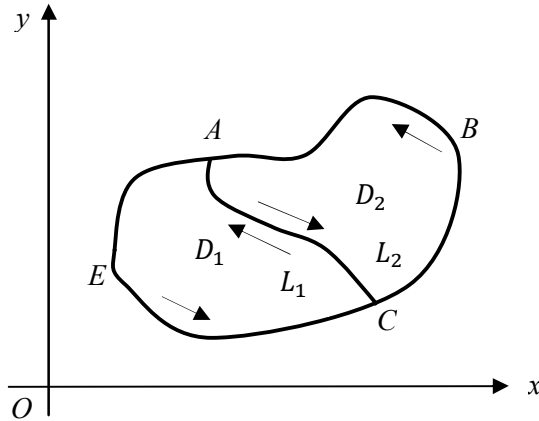


Рисунок 13.5 – Розбиття області D , яка обмежена замкненою лінією L

Доведення. Нехай область D обмежена замкненою лінією $L(AECBA)$, а області D_1 і D_2 - відповідно лініями $L_1(AECA)$ і $L_2(ACBA)$ (рис. 13.5). На кожному контурі маємо

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{AEC} Pdx + Qdy + \int_{CA} Pdx + Qdy;$$

$$\int_{L_2} Pdx + Qdy = \int_{AC} Pdx + Qdy + \int_{CBA} Pdx + Qdy.$$

Інтеграли по CA і AC беруться по одній самій лінії, лише в різних напрямках, тому їхня сума дорівнює нулю. Додамо послідовно отримані рівності, отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{L_2} Pdx + Qdy = \\ & = \int_{AEC} Pdx + Qdy + \int_{CBA} Pdx + Qdy = \int_L Pdx + Qdy. \end{aligned}$$

Що й потрібно було довести.

13.5 Обчислення криволінійних інтегралів першого роду

Ми вже відзначили, що властивості криволінійного інтеграла ідентичні властивостям визначеного інтеграла. Обчислення криволінійних інтегралів по довжині виконується шляхом перетворення їх у визначені інтеграли. Розглянемо всі можливі ситуації завдання лінії на площині та у просторі.

1. Нехай лінія L задана на площині параметричним рівнянням $x = x(t), y = y(t)$.

Пригадаємо (8.65), що елементарна дуга в такому випадку обчислюється за формулою

$$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt.$$

Згідно з цим сформулюємо **правило 1**: для обчислення криволінійного інтеграла по дузі (першого роду), де лінія L задана параметричними рівняннями $x = x(t), y = y(t)$, його перетворюють у визначений, виконуючи заміну

$$x = x(t), y = y(t), dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt,$$

інтегрування проводять в інтервалі зміни t , який відповідає лінії інтегрування:

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt. \quad (13.9)$$

Приклад 13.1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L xy^2 dl$, де L - дуга кола $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, розташована в першій чверті.

Розв'язання. Знайдемо похідні та виконаємо необхідні перетворення

$$\begin{aligned} x'_t &= -R \sin t; \quad y'_t = R \cos t; \\ dl &= \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt = R dt. \end{aligned}$$

Підставимо в інтеграл та обчислимо його

$$\begin{aligned} \int_L xy^2 dl &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos t \cdot (R \sin t)^2 \cdot R dt = R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \cos t dt = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = \sin t \\ du = \cos t dt \\ u_n = \sin 0 = 0 \\ u_b = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \right] = R^3 \int_0^1 u^2 du = R^3 \frac{u^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{R^3}{3}. \end{aligned}$$

2. Нехай лінія L задана на площині явно $y = y(x)$.

Пригадаємо (8.64), що елементарна дуга в такому випадку обчислюється за формулою

$$dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Згідно з цим сформулюємо **правило 2**: для обчислення криволінійного інтеграла по дузі (першого роду), де лінія L

задана явним рівнянням $y = y(x)$, його перетворюють у визначений, виконуючи заміну

$$y = y(x), dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx,$$

інтегрування проводять в інтервалі зміни x , який відповідає лінії інтегрування:

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (13.10)$$

Приклад 13.2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L \frac{x^3}{y^2} dl$, де L - дуга гіперболи $xy = 1$, між точками $A(1; 1)$ і $B(2; \frac{1}{2})$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння лінії, знайдемо похідну та виконаємо необхідні перетворення

$$y = \frac{1}{x}; \quad y' = -\frac{1}{x^2};$$

$$dl = \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx = \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2} dx.$$

Підставимо в інтеграл та обчислимо його

$$\begin{aligned} \int_L \frac{x^3}{y^2} dl &= \int_1^2 \frac{x^3}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2} dx = \int_1^2 x^3 \sqrt{x^4+1} dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = x^4 + 1 \\ du = 4x^3 dx \\ u_{\text{н}} = 1^4 + 1 = 2 \\ u_{\text{б}} = 2^4 + 1 = 17 \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int_2^{17} \sqrt{u} du = \frac{1}{4} \frac{u\sqrt{u}}{\frac{3}{2}} \Big|_2^{17} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6}(17\sqrt{17} - 2\sqrt{2}).$$

3. Нехай лінія L задана на площині явно $x = x(y)$.

Елементарна дуга в такому випадку обчислюється за формулою

$$dl = \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy.$$

Згідно з цим сформулюємо **правило 3**: для обчислення криволінійного інтеграла по дузі (першого роду), де лінія L задана явним рівнянням $x = x(y)$, його перетворюють у визначений, виконуючи заміну

$$x = x(y), dl = \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy,$$

інтегрування проводять в інтервалі зміни y , який відповідає лінії інтегрування:

$$\int_L f(x, y) dl = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy. \quad (13.11)$$

Приклад 13.3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L y^2 dl$, де L - дуга лінії $x = \ln y$, між точками $A(0; 1)$ і $B(1; e)$.

Розв'язання. Знайдемо похідну та виконаємо необхідні перетворення

$$x' = \frac{1}{y}; \quad dl = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{y}\right)^2} dy = \frac{\sqrt{y^2 + 1}}{y} dy.$$

Підставимо в інтеграл та обчислимо його

$$\int_L y^2 dl = \int_0^1 y^2 \frac{\sqrt{y^2 + 1}}{y} dy = \int_0^1 y \sqrt{y^2 + 1} dy =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = y^2 + 1 \\ du = 2y dy \\ u_H = 0^2 + 1 = 1 \\ u_B = 1^2 + 1 = 2 \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \frac{u\sqrt{u}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

4. Нехай лінія L задана на площині в полярній системі координат $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$.

Елементарна дуга в такому випадку обчислюється за формулою (8.66)

$$dl = \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2} d\varphi$$

Згідно з цим сформулюємо **правило 4**: для обчислення криволінійного інтеграла по дузі (першого роду), де лінія L задана в полярній системі координат, його перетворюють у визначений, виконуючи заміну

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, dl = \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2} d\varphi,$$

інтегрування проводять в інтервалі зміни φ , який відповідає лінії інтегрування:

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2} d\varphi. \quad (13.12)$$

Приклад 13.4. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl, \text{ де } L - \text{ дуга лемніскати } (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \text{ } (x \geq 0, y \geq 0).$$

Розв'язання. Для обчислення інтегралу необхідно перейти до полярних координат:

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, dl = \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2} d\varphi,$$

тобто

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{(\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2} = \rho; \\ ((\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2)' &= a^2((\rho \cos \varphi)^2 - (\rho \sin \varphi)^2); \\ \rho^4 &= a^2 \rho^2 \cos 2\varphi; \quad \rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}.\end{aligned}$$

З умови $x \geq 0, y \geq 0$ з'ясовуємо інтервал зміни кута повороту полярного радіуса: $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

Знайдемо похідну та виконаємо необхідні перетворення:

$$\begin{aligned}\rho' &= -\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}, \\ \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2} &= \sqrt{\left(-\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)^2 + (a\sqrt{\cos 2\varphi})^2} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.\end{aligned}$$

Підставимо в інтеграл та обчислимо його

$$\begin{aligned}\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho \cdot \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi = a^2 \cdot \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2 \pi}{4}.\end{aligned}$$

5. Нехай лінія L задана у просторі параметричним рівнянням $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$.

Елементарна дуга в такому випадку обчислюється за формулою

$$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt.$$

Згідно з цим сформулюємо **правило 5**: для обчислення криволінійного інтеграла по дузі (першого роду), де лінія L задана параметричними рівняннями $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, його перетворюють у визначений, виконуючи заміну

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt,$$

інтегрування проводять в інтервалі зміни t , який відповідає лінії інтегрування:

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt. \quad (13.13)$$

Приклад 13.5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L (3x + 4y + 2z - 2) dl$, де L – відрізок прямої між точками $A(4, -3, 6), B(2, -5, 5)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої за формулою (4.27):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}, \Rightarrow \frac{x-4}{2-4} = \frac{y+3}{-5+3} = \frac{z-6}{5-6}, \frac{x-4}{-2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-6}{-1},$$

та перейдемо до параметричного завдання прямої (4.31)

$$\begin{cases} \frac{x-4}{-2} = t; \\ \frac{y+3}{-2} = t; \\ \frac{z-6}{-1} = t; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t + 4; \\ y = -2t - 3; \\ z = -t + 1. \end{cases}$$

Знайдемо похідні та виконаємо необхідні перетворення

$$x'_t = -2; y'_t = -2; z'_t = -1;$$

$$dl = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} dt = 3dt.$$

З'ясуємо інтервал зміни параметра t :

$$\begin{aligned} x_A &= 4; & 4 &= -2t + 4; & t_H &= 0; \\ x_B &= 2; & 2 &= -2t + 4; & t_B &= 1. \end{aligned}$$

Підставимо в інтеграл та обчислимо його

$$\begin{aligned} \int_L (3x + 4y + 2z - 2) dl &= \\ &= 3 \int_0^1 (3(-2t + 4) + 4(-2t - 3) + 2(-t + 1) - 2) dt = \\ &= -48 \int_0^1 t dt = -24t^2 \Big|_0^1 = -24. \end{aligned}$$

13.6 Обчислення криволінійних інтегралів другого роду

Обчислення криволінійних інтегралів за координатами як і криволінійних інтегралів по дузі виконується шляхом перетворення їх у визначені інтеграли. Розглянемо всі можливі ситуації завдання лінії на площині та у просторі.

1. Нехай лінія L задана на площині параметричним рівнянням $x = x(t), y = y(t)$.

За правилом знаходження диференціалів маємо

$$dx = x'_t dt, \quad dy = y'_t dt.$$

Згідно з цим сформулюємо **правило 1**: для обчислення криволінійного інтеграла за координатами (другого роду), де

лінія L задана параметричними рівняннями $x = x(t), y = y(t)$, його перетворюють у визначений, виконуючи заміну

$$x = x(t), y = y(t), dx = x'_t dt, dy = y'_t dt,$$

інтегрування проводять в інтервалі зміни t , який відповідає лінії інтегрування:

$$\begin{aligned} & \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} (P(x(t), y(t)) \cdot x'_t + Q(x(t), y(t)) \cdot y'_t) dt. \quad (13.14) \end{aligned}$$

Приклад 13.6. Обчислити криволінійний інтеграл

$\int_L xydx + y^2dy$, де L – дуга кривої $x = t^2, y = t, 1 \leq t \leq 2$.

Розв'язання. Знайдемо похідні й підставимо у формулу (13.14)

$$\begin{aligned} x'_t &= 2t, \quad y'_t = 1; \\ \int_L xydx + y^2dy &= \int_1^2 (t^2 \cdot t \cdot 2t + t^2 \cdot 1) dt = \int_1^2 (2t^4 + t^2) dt = \\ &= \left(\frac{2t^5}{5} + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{64}{5} + \frac{8}{3} - \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{221}{15} = 14 \frac{11}{15}. \end{aligned}$$

2. Нехай лінія L задана на площині явно $y = y(x)$.

В такому випадку диференціал знаходиться як

$$dy = y'(x)dx.$$

Згідно з цим сформулюємо **правило 2**: для обчислення криволінійного інтеграла по координатах (другого роду), де лінія L задана явним рівнянням $y = y(x)$, його перетворюють в визначений, виконуючи заміну

$$y = y(x), \quad dy = y'(x)dx,$$

інтегрування проводять в інтервалі зміни x , який відповідає лінії інтегрування:

$$\begin{aligned} & \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \\ & = \int_a^b \left(P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x) \right) dx. \end{aligned} \quad (13.15)$$

3. Нехай лінія L задана на площині явно $x = x(y)$.
За правилом знаходження диференціалів, маємо

$$dx = x'(y)dy.$$

Згідно з цим сформулюємо **правило 3**: для обчислення криволінійного інтеграла за координатами (другого роду), де лінія L задана явним рівнянням $x = x(y)$, його перетворюють у визначений, виконуючи заміну

$$x = x(y), \quad dx = x'(y)dy,$$

інтегрування проводять в інтервалі зміни y , який відповідає лінії інтегрування:

$$\begin{aligned} & \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \\ & = \int_c^d \left(P(x(y), y) \cdot x'(y) + Q(x(y), y) \right) dy. \end{aligned} \quad (13.16)$$

Зауваження. Якщо лінія L складається з декількох частин, при переході від криволінійного до визначеного

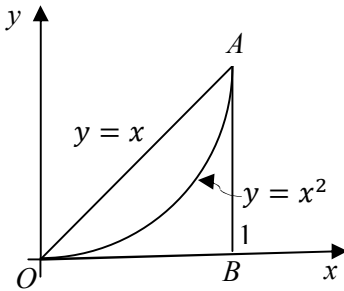
інтеграла лінію L розбивають на вказані частини, і весь інтеграл розглядають як суму інтегралів по кожній частці.

Приклад 13.7. Обчислити криволінійний інтеграл

$\int_L (x + y)dx + xydy$, де лінія L :

- а) відрізок прямої, що з'єднує точки $O(0,0)$ і $A(1,1)$;
- б) дугу параболи $y = x^2$ між точками $O(0,0)$ і $A(1,1)$;
- в) ламану OBA , де $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,1)$.

Розв'язання. Побудуємо вказані контури інтегрування (рис. 13.6) та розв'яжемо три задачі окремо.



- а) лінія, яка є контуром інтегрування – пряма $y = x$. За формулою (13.15) маємо:
 $y' = 1$;

$$\begin{aligned} \int_{L_{AB}} (x + y)dx + xydy &= \\ &= \int_0^1 ((x + x) + x \cdot x \cdot 1) dx = \end{aligned}$$

Рисунок 13.6 – Контур інтегрування

$$= \int_0^1 (2x + x^2) dx = \left(x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3};$$

- б) лінія, яка є контуром інтегрування – парабола $y = x^2$. За формулою (13.15) маємо:

$$\begin{aligned} y' &= 2x; \\ \int_{L_{AB}} (x + y)dx + xydy &= \int_0^1 ((x + x^2) + x \cdot x^2 \cdot 2x) dx = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 (x + x^2 + 2x^4) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{37}{30};$$

в) лінія, яка є контуром інтегрування – ламана, яка складається з двох частин: OB ($y = 0$) та BA ($x = 1$). За формулами (13.15), (13.16) для кожної з частин маємо:

$$OB: \quad y = 0 \quad y' = 0;$$

$$\begin{aligned} \int_{L_{OB}} (x + y) dx + xy dy &= \int_0^1 ((x + 0) + x \cdot 0 \cdot 0) dx = \int_0^1 x dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$BA: \quad x = 1 \quad x' = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{L_{BA}} (x + y) dx + xy dy &= \int_0^1 ((1 + y) \cdot 0 + 1 \cdot y) dy = \int_0^1 y dy = \\ &= \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

Остаточно маємо значення криволінійного інтеграла по ламаній OBA :

$$\int_{L_{OBA}} (x + y) dx + xy dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Порівняємо отримані результати. В усіх трьох випадках криволінійний інтеграл ми обчислювали за тією самою підінтегральною функцією, початкові та кінцеві точки в усіх ситуаціях співпадали, а величини інтегралів ми отримали різні. З цього випливає висновок, що криволінійний інтеграл залежить

не лише від початкової та кінцевої точки, а й від лінії інтегрування.

4. Нехай лінія L задана в просторі параметричним рівнянням $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$.

За правилом знаходження диференціалів маємо

$$dx = x'_t dt, \quad dy = y'_t dt, \quad dz = z'_t dt.$$

Згідно з цим сформулюємо **правило 4** для обчислення криволінійного інтеграла за координатами (другого роду), де лінія L задана параметричними рівняннями $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, його перетворюють у визначений, виконуючи заміну

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), dx = x'_t dt, dy = y'_t dt, dz = z'_t dt,$$

інтегрування проводять в інтервалі зміни t , який відповідає лінії інтегрування:

$$\begin{aligned} & \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} (P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'_t + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'_t + \\ & \quad + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'_t) dt \end{aligned} \quad (13.17)$$

Приклад 13.8. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L yz dx + z^2 dy + (x - y) dz$, де L – відрізок прямої від точки $A(1; 0; 2)$ до точки $B(2; -1; 0)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої AB за формулою (4.27):

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-0}{-1-0} = \frac{z-2}{0-2}; \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{-2}$$

та перейдемо до параметричного рівняння (4.18):

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = t; \\ \frac{y}{-1} = t; \\ \frac{z-2}{-2} = t; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t + 1; \\ y = -t; \\ z = -2t + 2. \end{cases}$$

Знайдемо похідні $x'_t = 1$; $y'_t = -1$; $z'_t = -2$; межі інтегрування для змінної t

$$\begin{aligned} x_A = 1; \quad t + 1 = 1 &\Rightarrow t_A = 0; \\ x_B = 1; \quad t + 1 = 2 &\Rightarrow t_B = 1; \end{aligned}$$

та підставимо у формулу (13.17):

$$\begin{aligned} \int_{L_{AB}} yzdx + z^2dy + (x-y)dz &= \\ &= \int_0^1 (-t(-2t+2) \cdot 1 + (-2t+2)^2 \cdot (-1) + (t+1+t)(-2)) dt \\ &= \int_0^1 (-2t^2 + 2t - 6) dt = \left(-\frac{2t^3}{3} + t^2 - 6t \right) \Big|_0^1 = -5\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

13.7 Формула Гріна

Формула Гріна, якій присвячений наступний розділ, дає змогу встановити зв'язок між криволінійним інтегралом по замкненому контуру та подвійним інтегралом по області, межею якої є цей контур.

Теорема Гріна. Якщо функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в області D , то застосовується формула

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy, \quad (13.18)$$

де L - межа області D ; інтегрування по контуру L проводиться в додатному напрямі.

Формула (13.18) називається **формулою Гріна**.

Доведення: Розглянемо в координатній площині xOy область D , яка обмежена лінією L , що перетинається з прямими, паралельними координатним осям не більше ніж у двох точках (рис. 13.7). Перетворимо подвійний інтеграл

$$I_1 = \iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy.$$

Зведемо подвійний інтеграл до двократного, проінтегрувавши спочатку по y , а потім по x , отримаємо

$$I_1 = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy,$$

де $y = y_1(x)$ - рівняння лінії AEC , $y = y_2(x)$ - рівняння лінії ABC .

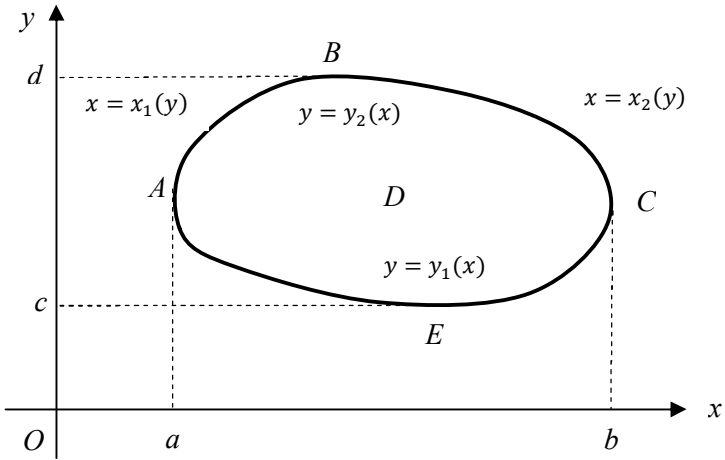


Рисунок 13.7 - Область D , яка обмежена лінією L , що перетинається з прямими, паралельними до координатних осей не більше ніж у двох точках

Виконаємо внутрішнє інтегрування, отримаємо

$$I_1 = \int_a^b P(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \int_a^b \left(P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)) \right) dx =$$

$$= \int_a^b P(x, y_2(x)) dx + \int_b^a P(x, y_1(x)) dx.$$

У другому доданку ми змінили межі інтегрування, і, відповідно, знак перед інтегралом. Перший з інтегралів відповідає контуру ABC , а другий – контуру CEA . Їхня сума дорівнює криволінійному інтегралу за всім замкненим контуром L , який обійшли у від'ємному напрямку. Тому

$$I_1 = \iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = - \oint_L P dx.$$

Аналогічно

$$I_2 = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} (Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y)) dy,$$

де $x_1(y)$ і $x_2(y)$ - рівняння ліній EAB і ECB . Виконавши відповідні перетворення як і у попередньому випадку, маємо

$$I_2 = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_c^d Q(x, y) dy + \int_d^c Q(x, y) dy.$$

Сума отриманих інтегралів дорівнює інтегралу по замкненому контуру L , який обійшли в додатному напрямку

$$I_2 = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_L Q dy.$$

Якщо знайти різницю $I_2 - I_1$, отримаємо

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy.$$

що й потрібно було довести.

Приклад 13.9. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\oint_L \frac{(2x - y^2 \sqrt{x^2 + 4y^3}) dx + (12y^2 + x^2 \sqrt{x^2 + 4y^3}) dy}{2\sqrt{x^2 + 4y^3}},$$

де L - контур прямокутника з вершинами в точках $A(1,3)$, $B(8,3)$, $C(8,5)$, $D(1,5)$, застосувавши формулу Гріна.

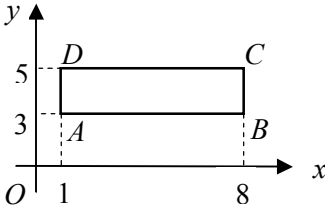


Рисунок 13.8 -
Контур інтегрування

Розв'язання: Контур інтегрування L , який обмежує область D , зображений на рисунку 13.8.

Як бачимо, проінтегрувати цю функцію безпосередньо проблематично. З'ясуємо, чи спроститься підінтегральний вираз після застосування формули Гріна.

Для цього випишемо функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ та знайдемо їхні частинні похідні:

$$P(x, y) = \frac{2x - y^2 \sqrt{x^2 + 4y^3}}{2\sqrt{x^2 + 4y^3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4y^3}} - \frac{y^2}{2};$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{6xy^2}{\sqrt{(x^2 + 4y^3)^3}} - y;$$

$$Q(x, y) = \frac{12y^2 + x^2 \sqrt{x^2 + 4y^3}}{2\sqrt{x^2 + 4y^3}} = \frac{6y^2}{\sqrt{x^2 + 4y^3}} + \frac{x^2}{2};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{6xy^2}{\sqrt{(x^2 + 4y^3)^3}} + x;$$

Для підстановки у формулу Гріна (13.18) виконаємо перетворення:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{6xy^2}{\sqrt{(x^2 + 4y^3)^3}} + x - \left(-\frac{6xy^2}{\sqrt{(x^2 + 4y^3)^3}} - y \right) = x + y.$$

Отже, перетворивши криволінійний інтеграл у подвійний, обчислимо його:

$$\oint_L \frac{(2x - y^2 \sqrt{x^2 + 4y^3})dx + (12y^2 + x^2 \sqrt{x^2 + 4y^3})dy}{2\sqrt{x^2 + 4y^3}} =$$

$$= \iint_D (x + y) dx dy = \int_1^8 dx \int_3^5 (x + y) dy = \int_1^8 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_3^5 dx =$$

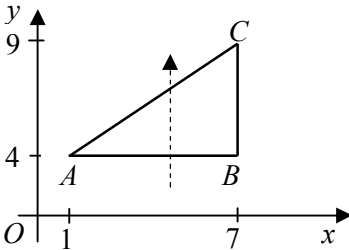
$$= \int_1^8 \left(5x + \frac{25}{2} - 3x - \frac{9}{2} \right) dx = \int_1^8 (2x + 8) dx = (x^2 + 8x) \Big|_1^8 =$$

$$= 119.$$

Приклад 13.10. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint_L y^2 dx + (x + y)^2 dy$, якщо контуром інтегрування є трикутник із вершинами в точках $A(1,4), B(7,4), C(7,9)$ двома способами:

- а) безпосередньо;
- б) за формулою Гріна.

Розв'язання. Побудуємо контур інтегрування та область, яку він обмежує (рис. 13.9)



а) для безпосереднього обчислення встановимо, що контур інтегрування можна розбити на три частини – відрізки AB, BC, CA . Обчислимо криво-лінійний інтеграл в кожному з цих інтервалів:

Рисунок 13.9 – Контур інтегрування

$$AB: \quad y = 4; \quad y' = 0 \quad \int_{L_{AB}} y^2 dx + (x + y)^2 dy = 16 \int_1^7 dx = 96$$

$$BC: \quad x = 7; \quad x' = 0 \quad \int_{L_{BC}} y^2 dx + (x + y)^2 dy = \int_4^9 (7 + y)^2 dy = \\ = \frac{(7 + y)^3}{3} \Big|_4^9 = \frac{4096 - 1331}{3} = \frac{2765}{3};$$

$$CA: \quad y = \frac{5}{6}x + \frac{19}{6}; \quad y' = \frac{5}{6}$$

$$\int_{L_{CA}} y^2 dx + (x + y)^2 dy = \\ = \int_7^1 \left(\left(\frac{5}{6}x + \frac{19}{6} \right)^2 + \left(x + \frac{5}{6}x + \frac{19}{6} \right)^2 \cdot \frac{5}{6} \right) dx = \\ = \left[\frac{6}{5} \frac{\left(\frac{5}{6}x + \frac{19}{6} \right)^3}{3} + \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{6} \frac{\left(\frac{11}{6}x + \frac{19}{6} \right)^3}{3} \right] \Big|_7^1 = -\frac{2603}{3}.$$

Знайдемо суму отриманих значень на кожному частковому інтервалі криволінійного інтеграла, отримаємо значення інтеграла на замкненому контурі:

$$\oint_L y^2 dx + (x + y)^2 dy = 96 + \frac{2765}{3} - \frac{2603}{3} = 150.$$

б) для того щоб скористатися формулою Гріна, випишемо

$$P(x, y) = y^2 \quad \text{і} \quad Q(x, y) = (x + y)^2$$

та знайдемо відповідні частинні похідні

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x + y);$$

підставимо в інтеграл та обчислимо його, розставивши межі інтегрування, розглядаючи область як вертикальну

$$\begin{aligned} \oint_L y^2 dx + (x + y)^2 dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= \int_1^7 dx \int_4^{\frac{5}{6}x + \frac{19}{6}} (2x + 2y - 2y) dy = \int_1^7 2xy \left| \frac{5}{6}x + \frac{19}{6} \right|_4 dx = \\ &= \int_1^7 2x \left(\frac{5}{6}x + \frac{19}{6} - 4 \right) dx = \frac{5}{3} \int_1^7 (x^2 - x) dx = \frac{5}{3} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^7 = \\ &= 150. \end{aligned}$$

Проаналізуємо отримані результати. У розв'язаному прикладі інтегрування було можливим будь-яким способом. Але застосування формули Гріна дало змогу нам уникнути зайвих обчислень.

13.8 Умова незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування

Розв'язуючи приклад 13.7, ми обчислювали криволінійний інтеграл по трьом різним лініям, початкова та кінцева точка яких співпадали. У нас виникає питання, а чи завжди криволінійний інтеграл залежить від шляху інтегрування?

З'ясуємо, за яких умов величина криволінійного інтеграла

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (13.19)$$

не залежить від шляху інтегрування, а лише від початкової A та кінцевої B точок та від функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$.

Теорема 13.3. Якщо функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ разом зі своїми частинними похідними першого порядку $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ визначені та неперервні в однозв'язній обмеженій замкненій області D площини xOy , то наступні чотири умови еквівалентні. Тобто виконання будь-якої з них обумовлює виконання останніх трьох:

1) криволінійний інтеграл $\int_L Pdx + Qdy$ по будь-якому замкнутому контуру L , який лежить в області D , дорівнює

$$\int_L Pdx + Qdy = 0;$$

2) для будь-яких двох точок A і B області D значення інтеграла (13.19) не залежить від шляху інтегрування, який повністю лежить в області D

$$\int_{A\alpha B} Pdx + Qdy = \int_{A\beta B} Pdx + Qdy; \quad (13.20)$$

3) вираз $Pdx + Qdy$ становить повний диференціал деякої функції $u(x, y)$, тобто в області D існує така функція $u(x, y)$, що

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy; \quad (13.21)$$

4) в області D у кожній точці виконується умова

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (13.22)$$

Доведення:

- 1) Нехай умова (1) виконана, тоді інтеграл по замкнутому контуру $A\alpha B\beta A$, який зображений на рисунку 3.10 дорівнює нулю.

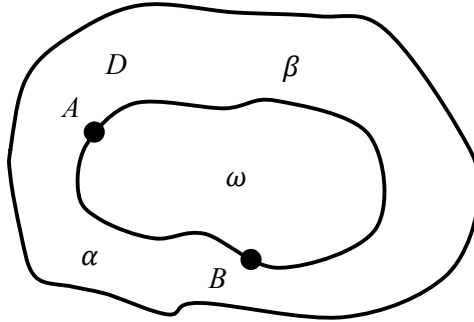


Рисунок 13.10 - Однозв'язна обмежена замкнена область D

Тобто
$$\int_{A\alpha B\beta A} = \int_{A\alpha B} + \int_{B\beta A} = 0$$

або
$$\int_{A\alpha B} Pdx + Qdy = \int_{B\beta A} Pdx + Qdy.$$

- 2) Нехай умова (2) виконана, тобто інтеграл (13.19) не залежить від шляху інтегрування.

Якщо початкова точка A зафіксована, то цей інтеграл буде деякою функцією координат x, y точки B :

$$u(x, y) = \int_{AB} Pdx + Qdy. \quad (13.23)$$

Доведемо, що ця функція має неперервні частинні похідні першого порядку. Виразимо частинні прирости по змінній x функції $u(x, y)$ у точці $B(x, y)$

$$\Delta_x u = u(x + \Delta x, y) - u(x, y)$$

через криволінійний інтеграл по шляху, який з'єднує дві точки $B(x, y)$ і $C(x + \Delta x, y)$:

$$\begin{aligned} \Delta_x u &= \int_{ACB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy - \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \\ &= \int_{BC} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \end{aligned} \quad (13.24)$$

За сформульованою умовою інтеграл не залежить від вигляду кривої, тому ми обрали відрізок BC , паралельний до осі Ox . Криволінійний інтеграл (13.24) буде дорівнювати визначеному інтегралу від змінної x , оскільки y зберігає стале значення, а $dy = 0$.

$$\Delta_x u = \int_{BC} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_x^{x+\Delta x} P(x, y)dx.$$

Застосуємо до останнього інтеграла теорему про середнє, отримаємо

$$\Delta_x u = P(\xi, y)\Delta x, \quad x < \xi < x + \Delta x.$$

Оскільки з умови $P(x, y)$ неперервна, звідси дістаємо, що

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(\xi, y) = P(x, y).$$

Аналогічно виводиться рівність $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$. Таким чином

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (13.25)$$

3) Нехай виконана умова (3), тобто

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

За теоремою про рівність мішаних похідних маємо

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Тобто умова (4) виконана.

4) Нехай виконана умова (4). Зафіксуємо в області D будь який замкнений контур L - гладкий або кусково-гладкий.

Позначимо через ω область, обмежену L ; вона буде також однозв'язною. Застосуємо формулу Гріна

$$\iint_{\omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_L P dx + Q dy.$$

Ліва частина цієї рівності дорівнює нулю за умовою (4), а тому дорівнює і права частина, тобто виконана умова (1). Теорема доведена.

13.9 Інтегрування повних диференціалів. Первісна функція

Якщо підінтегральний вираз у криволінійному інтегралі

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

є повним диференціалом, то за теоремою 13.3, величина інтеграла не залежить від шляху інтегрування, а залежить лише від початкової та кінцевої точки лінії інтегрування. Тому його зазвичай записують у вигляді

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

де (x_0, y_0) і (x_1, y_1) - координати початкової та кінцевої точок відповідно.

Потрібно з'ясувати найкращий шлях інтегрування. Перше, що спадає на думку – з'єднати прямою початкову та кінцеву точки. Але цей спосіб не доцільний. Скористаємося прийомом, який ми застосували для доведення теореми 13.3, а саме, оберемо у якості шляху інтегрування – ламану $M_0M_2M_1$ або $M_0M_3M_1$ (рис. 13.11), яка складається з відрізків, паралельних осям координат. При такому виборі на кожній з часток шляху або $dx = 0$, або $dy = 0$, що значно спрощує інтегрування.

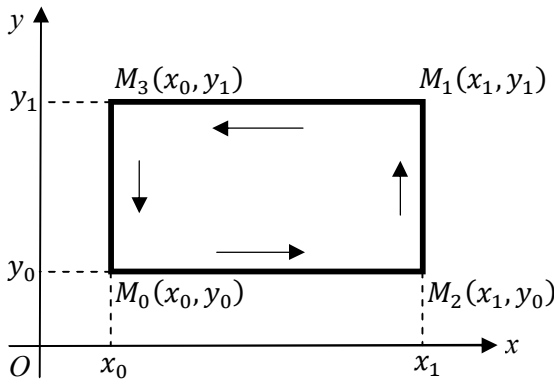


Рисунок 13.11 – Контур інтегрування

Отже, у такому випадку криволінійний інтеграл зводиться до визначеного

- по ламаній $M_0M_2M_1$: на ділянці M_0M_2 $y = y_0$, $dy = 0$, а на ділянці M_2M_1 $x = x_1$, $dx = 0$:

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y)dy; \quad (13.26)$$

- по ламаній $M_0M_3M_1$: на ділянці M_0M_3 $x = x_0$, $dx = 0$, а на ділянці M_3M_1 $y = y_1$, $dy = 0$:

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_1)dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_0, y)dy. \quad (13.27)$$

Зауваження. Якщо ламані $M_0M_2M_1$ і $M_0M_3M_1$ виходять за межі області D , де виконуються умови теореми 13.3, то інтегрування можна проводити, наприклад, по ламаній $M_0M_4M_5M_1$ (рис. 13.12).

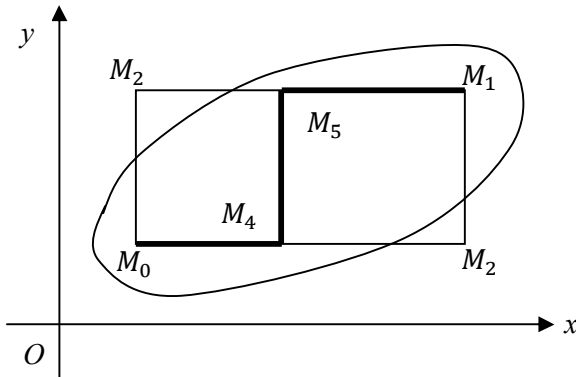


Рисунок 13.12 – Контур інтегрування

З'ясуємо зв'язок між отриманими в результаті інтегрування (13.26), (13.27) функцій із функцією $u(x, y)$, для якої підінтегральний вираз є повним диференціалом

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Будемо обчислювати інтеграл за формулою

$$I(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy.$$

до того ж другому доданку x вважається сталою. З того, що $P = \frac{\partial u}{\partial x}$ і $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$ прямує

$$\int_{x_0}^x P(x, y_0)dx = \int_{x_0}^x \frac{\partial u(x, y_0)}{\partial x} dx = u(x, y_0) \Big|_{x_0}^x =$$

$$= u(x, y_0) - u(x_0, y_0)$$

і

$$\int_{y_0}^y Q(x, y)dy = \int_{y_0}^y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dy = u(x, y) \Big|_{y_0}^y =$$

$$= u(x, y) - u(x, y_0)$$

Тобто

$$I(x, y) = u(x, y_0) - u(x_0, y_0) + u(x, y) - u(x, y_0) =$$

$$= u(x, y) - u(x_0, y_0)$$

або

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = u(x, y) - u(x_0, y_0). \quad (13.28)$$

Визначення 13.3. Якщо $u(x, y)$ – первісна для повного диференціала $Pdx + Qdy$, то отримана формула (13.28) називається **формулою Ньютона-Лейбниці для криволінійних інтегралів**.

Якщо ми скористаємося способом обчислення криволінійного інтеграла (13.26), (13.27) і замінимо $u(x_0, y_0)$ на C , отримаємо дві рівносильні формули для знаходження функції за її повним диференціалом:

$$u(x, y) = \begin{cases} \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy + C, \\ \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + C. \end{cases} \quad (13.29)$$

Приклад 13.11. Перевірити, чи є цей вираз

$$(4x^3 - 3y^2 + 5y)dx + (5x - 6xy - 4y)dy$$

повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за її повним диференціалом.

Розв'язання. Перевіримо, чи є цей вираз повним диференціалом, для цього знайдемо частинні похідні

$$\begin{aligned} P(x, y) &= 4x^3 - 3y^2 + 5y; & Q(x, y) &= 5x - 6xy - 4y; \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -6y + 5; & \frac{\partial Q}{\partial x} &= 5 - 6y \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned}$$

Отже, цей вираз є повним диференціалом. Як початкову точку оберемо початок координат. У цій точці виконуються всі умови теореми 13.3. Знаходити функцію за повним диференціалом будемо за першою з формул (13.29):

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x 4x^3 dx + \int_0^y (5x - 6xy - 4y) dy + C = \\ &= x^4 \Big|_0^x + (5xy - 3xy^2 - 2y^2) \Big|_0^y + C = \\ &= x^4 + 5xy - 3xy^2 - 2y^2 + C. \end{aligned}$$

13.10 Деякі застосування криволінійних інтегралів

Криволінійні інтеграли широко застосовуються в геометрії, фізиці. Наведемо лише деякі з них.

1. Очевидно застосування криволінійних інтегралів для обчислення *довжини дуги* як плоских, так і просторових ліній:

$$L = \int_L dl. \quad (13.30)$$

Приклад 13.12. Обчислити довжину лінії

$$x = \frac{2}{3}t^3, y = t^2, z = t, \quad 0 \leq t \leq 3.$$

Розв'язання. За формулою (13.30) обчислимо довжину дуги просторової лінії. Криволінійний інтеграл першого роду обчислюється за формулою (13.13). Для цього необхідно знайти похідні

$$x'_t = 2t^2, \quad y'_t = 2t, \quad z'_t = 1,$$

та підставити у формулу. Остаточно маємо

$$L = \int_L dl = \int_0^3 \sqrt{(2t^2)^2 + (2t)^2 + 1} dt = \int_0^3 \sqrt{4t^4 + 4t^2 + 1} dt =$$

$$= \int_0^3 \sqrt{(2t^2 + 1)^2} dt = \int_0^3 (2t^2 + 1) dt = \left(\frac{2}{3} t^3 + t \right) \Big|_0^3 = 21 \text{ (од).}$$

2. Обчислення **площі фігури** S , яка розташована в площині xOy й обмежена лінією L :

$$S = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx. \quad (13.31)$$

Приклад 13.13. Обчислити площу фігури, обмеженої замкненим контуром, утвореним лініями $y = x^4$, $y^4 = x$.

Розв'язання: Фігура, площу якої потрібно обчислити, зображена на рис. 13.13. Контур інтегрування складається з двох частин, через адитивність криволінійного інтеграла, його можна зобразити у вигляді двох доданків OA ($y = x^4$) і AO ($y^4 = x$). Пам'ятаємо, що контур потрібно обходити в додатному напрямку (проти ходу годинникової стрілки).

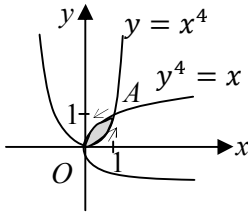


Рисунок 13.13 -
Контур інтегрування

стрілки.

Скористаємося формулою (13.31):

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_{L_{OA}} xdy - ydx + \frac{1}{2} \int_{L_{AO}} xdy - ydx = \\ &= \left[\begin{array}{l} OA: \quad y = x^4; \quad dy = 4x^3 dx \\ AO: \quad x = y^4; \quad dx = 4y^3 dy \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x \cdot 4x^3 dy - x^4) dx + \frac{1}{2} \int_1^0 (y^4 - y \cdot 4y^3) dy = \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^1 x^4 dx + \frac{3}{2} \int_0^1 y^4 dy = \frac{3}{10} x^5 \Big|_0^1 + \frac{3}{10} y^5 \Big|_0^1 = \frac{3}{5} \text{ (од}^2\text{)}.$$

3. Формулу (13.7) для обчислення **маси** m матеріальної дуги L ми вже отримали, коли вводили поняття криволінійного інтеграла по дузі (першого роду).

Приклад 13.14. Обчислити масу дуги $y = x^3$ ($0 \leq x \leq 1$), якщо її лінійна щільність дорівнює $\gamma(x, y) = y$.

Розв'язання. Обчислимо масу неоднорідної кубічної параболи за формулою (13.7):

$$\begin{aligned} m &= \int_L \gamma(x, y) dl = \int_0^1 y dl = \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = \\ &= \frac{1}{36} \int_0^1 \sqrt{1 + 9x^4} d(1 + 9x^4) = \frac{1}{36} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(1 + 9x^4)^3} \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{54} (10\sqrt{10} - 1) \text{ (од. маси)}. \end{aligned}$$

4. **Статичні моменти** відносно осей координат неоднорідної кривої обчислюються за формулами

$$M_x = \int_L y \gamma(x, y) dl; \quad M_y = \int_L x \gamma(x, y) dl, \quad (13.32)$$

а координати центра мас (за визначенням) – за формулами

$$x_c = \frac{M_y}{m}; \quad y_c = \frac{M_x}{m}. \quad (13.33)$$

Приклад 13.15. Обчислити координати центра мас циклоїди $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$ із рівномірно розподіленою масою.

Розв'язання: Якщо маса рівномірно розподілена, то щільність кривої – стала величина. Якщо в умовах задачі не вказано інше, вважаємо її рівною $\gamma(x, y) = 1$.

Для обчислення координат центра мас, необхідно знайти масу (13.7)

$$m = \int_L \gamma(x, y) dl = \left[\begin{array}{l} x'_t = 2(1 - \cos t) \\ y'_t = 2 \sin t \\ dl = \sqrt{(2(1 - \cos t))^2 + (2 \sin t)^2} dt = \\ = 4 \sin \frac{t}{2} dt \end{array} \right] =$$

$$= 4 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -8 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -8(-1 - 1) = 16,$$

та статичні моменти (13.32):

$$M_x = \int_L y \gamma(x, y) dl = 8 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} dt =$$

$$= 16 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = 16 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} dt = \left[\begin{array}{l} u = \cos \frac{t}{2} \\ du = -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} dt \\ \sin^2 \frac{t}{2} = 1 - u^2 \\ u_H = \cos 0 = 1 \\ u_B = \cos \pi = -1 \end{array} \right] =$$

$$= -32 \int_1^{-1} (1 - u^2) du = 32 \int_{-1}^1 (1 - u^2) du = 32 \left(u - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 =$$

$$= \frac{128}{3};$$

$$\begin{aligned} M_y &= \int_L x \gamma(x, y) dl = 8 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= 8 \int_0^{2\pi} t \sin \frac{t}{2} dt - 8 \int_0^{2\pi} \sin t \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= \left[\begin{array}{cc} \text{для 1-го інтеграла} & \text{для 2-го інтеграла} \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{cc} u = t & du = dt \\ dv = \sin \frac{t}{2} dt & v = -2 \cos \frac{t}{2}; \end{array} \quad \begin{array}{c} \sin t \sin \frac{t}{2} dt = \\ = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{t}{2} - \cos \frac{3t}{2} \right) \end{array} \right] = \\ &= -16t \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} + 16 \int_0^{2\pi} \cos \frac{t}{2} dt - 4 \int_0^{2\pi} \left(\cos \frac{t}{2} - \cos \frac{3t}{2} \right) dt = \\ &= -16t \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} + 32 \sin \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} - 8 \sin \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} + \frac{8}{3} \sin \frac{3t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 32\pi. \end{aligned}$$

За формулою (13.32) знайдемо координати центра мас:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{32\pi}{16} = 2\pi; \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{128}{3}}{16} = \frac{8}{3}.$$

5. Робота силового поля. Пригадаємо, що саме з розв'язання задачі про роботу силового поля ми ввели поняття криволінійного інтегралу по координатах (другого роду). Отже, роботу можна обчислити за формулою (13.8).

Приклад 13.16. Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{F} = x^2 \vec{i} + \frac{1}{y^2} \vec{j}$ під час переміщення матеріальної точки вздовж лінії $xy = 1$ від точки $A(1; 1)$ до точки $B\left(4; \frac{1}{4}\right)$.

Розв'язання: Підставимо в формулу (13.8) проекції сили на осі координат. Рівняння лінії – гіперболи в явному вигляді запишемо як $y = \frac{1}{x}$, її похідна дорівнює $y' = -\frac{1}{x^2}$.

$$\begin{aligned} A &= \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_1^4 x^2 dx + \frac{1}{y^2} dy = \\ &= \int_1^4 (x^2 - 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^4 = 18. \end{aligned}$$

Контрольні питання

1. Сформулюйте задачу про масу неоднорідної просторової лінії.
2. Сформулюйте задачу про роботу силового поля.
3. Дайте визначення криволінійного інтеграла першого роду. Розв'язання якої прикладної задачі приводить до криволінійного інтеграла першого роду?
4. Дайте визначення криволінійного інтеграла другого роду. Розв'язання якої прикладної задачі приводить до криволінійного інтеграла другого роду?
5. Наведіть правила обчислення криволінійних інтегралів першого роду у випадках ліній заданих у декартовій системі координат явно та параметрично та в полярній системі координат.
6. Наведіть правила обчислення криволінійних інтегралів другого роду у випадках ліній заданих у декартовій системі координат явно та параметрично та в полярній системі координат.
7. Як за допомогою формули Гріна зв'язати подвійний на криволінійний інтеграл? За яких умов це можливо?
8. Сформулюйте умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування.
9. Як знайти функцію за її повним диференціалом? Яким є оптимальний шлях інтегрування? Наведіть приклади.
10. Які застосування криволінійних інтегралів під час розв'язання прикладних задач ви знаєте?

Розділ 14 ЧИСЛОВІ РЯДИ

14.1 Загальні визначення

Визначення 14.1. Числовим рядом називається сума членів числової послідовності виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (14.1)$$

де u_n – члени ряду.

Визначення 14.2. Вираз для n -го члена ряду при довільному n називається **загальним членом** ряду.

З курсу середньої школи нам добре відомі приклади числових послідовностей - арифметична та геометрична прогресії.

Ряд вважається заданим, якщо відомо правило, за яким може бути обчислений будь-який член ряду. Традиційно використовують два способи завдання ряду:

- формулою $u_n = f(n)$;
- рекурентним співвідношенням, наприклад, $u_n = 3u_{n+1} + \frac{1}{2}u_{n-1}$.

Визначення 14.3. n -ою частковою сумою називають суму n перших членів ряду:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Визначення 14.3. Числовий ряд називається **збіжним**, якщо при $n \rightarrow \infty$ існує кінцева границя послідовності числових сум членів ряду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Визначення 14.4. Числовий ряд називається *розбіжним*, якщо границя послідовності числових сум членів ряду не існує, або прямує до нескінченності.

Визначення 14.5. Числовий ряд, усі елементи якого додатні, називається *рядом з додатними членами* (14.1).

Визначення 14.6. Числовий ряд, кожний елемент якого має знак, обернений до попереднього, називається *знакозмінним*:

$$\pm(u_1 - u_2 + \dots - u_n + \dots). \quad (14.2)$$

Приклад 14.1. Дослідити на збіжність числовий ряд, елементами якого є члени геометричної прогресії.

Розв'язання: Складемо суму нескінченної геометричної прогресії

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (14.3)$$

Сума n перших членів прогресії обчислюється за формулою

$$S_n = a \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Якщо $|q| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0$, маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a}{1 - q}.$$

Отже, при $|q| < 1$ нескінченна геометрична прогресія утворює збіжний ряд.

Якщо $|q| > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$, тому $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$. Тобто при $|q| > 1$ ряд розбігається.

Якщо $q = 1$, ряд

$$a + a + a + \dots + a + \dots \quad (a \neq 0)$$

має часткову суму $S_n = na$, яка прямує до нескінченності, тобто ряд є розбіжним.

Якщо $q = -1$, отримуємо ряд

$$a - a + a - a + \dots - a +$$

Його часткові суми приймають такі значення: якщо n - парне, то сума дорівнює нулю, якщо непарне – то часткова сума дорівнює a . Отже, ми отримали послідовність, що коливається, тобто границі вона не має, а тому буде розбіжною.

За результатами проведеного дослідження зробимо висновок: якщо $|q| < 1$, нескінчена геометрична прогресія є збіжною, якщо $|q| \geq 1$ – розбіжною. Цей висновок ще не раз стане нам у нагоді під час дослідження питання про збіжність числових рядів.

14.2 Властивості числових рядів

Теорема 14.1. Якщо ряд (14.1) збігається та має суму S , то ряд, утворений добутком кожного елемента ряду (14.1) на те саме число λ

$$\lambda u_1 + \lambda u_2 + \dots + \lambda u_n + \dots$$

теж збігається та має суму λS .

Доведення. Якщо часткова сума елементів першого ряду S_n , а другого - σ_n , то $\sigma_n = \lambda u_1 + \lambda u_2 + \dots + \lambda u_n + \dots$. Тобто, якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lambda u_1 + \lambda u_2 + \dots + \lambda u_n + \dots = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lambda S.$$

то й останній ряд також збігається.

Теорема 14.2. Якщо кожен із рядів

$$\begin{aligned}\bar{s} &= u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \\ \bar{\bar{s}} &= v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots,\end{aligned}$$

збігається, то ряд, отриманий шляхом додавання відповідних членів заданих рядів

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n) + \dots,$$

також збігається, а його сума дорівнює $\bar{s} + \bar{\bar{s}}$.

Доведення. За властивістю границі суми маємо:
якщо

$$\sigma_n = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n) = \bar{s}_n + \bar{\bar{s}}_n,$$

то
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{s}_n + \bar{\bar{s}}_n) = \bar{s} + \bar{\bar{s}},$$

що й потрібно було довести.

Теорема 14.3. Якщо ряд збігається, то збігається й ряд, отриманий із заданого шляхом додавання або відкидання будь-якого числа кінцевого числа членів.

Доведення. Нехай ми відкинемо декілька членів, наприклад, u_3, u_8, u_{21} . Щоб не змінювати нумерацію членів, що залишилися, замінимо відсутні елементи нулями. Тому різниця між сумами початкового та отриманого рядів дорівнює сумі відкинутих членів. Отже, якщо існувала кінцева границя часткових сум початкового ряду, то буде існувати й границя часткових сум отриманого відкиданням кінцевого числа членів

ряду. Тобто цей ряд також буде збіжним. Аналогічно доводиться теорема при додаванні кінцевого числа членів.

Отже, під час дослідження числових рядів нас буде цікавити головне питання: чи буде заданий ряд збіжним? Обчислювання границі часткових сум у загальному випадку не завжди є легкою задачею, тому нам необхідно сформулювати необхідні та достатні умови збіжності числових рядів.

14.3 Збіжність рядів з додатними членами. Необхідна ознака збіжності ряду

Теорема 14.4 (необхідна ознака збіжності ряду). Якщо ряд збігається, то загальний член ряду прямує до нуля при необмеженому зростанні його номера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0. \quad (14.4)$$

Доведення. Подамо часткову суму у вигляді

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n = S_{n-1} + u_n.$$

З умови збіжності ряду випливає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad \text{і} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S.$$

Отже, якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1},$$

то
$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = S - S = 0.$$

З необхідної умови збіжності випливає достатня умова розбіжності ряду: якщо загальний член ряду не прямує до нуля, то ряд розбігається.

Зауваження. Прямування до нуля загального елемента ряду не є достатньою умовою для збіжності ряду!

Сутність зауваження нам стане зрозумілою після розв'язання наступного прикладу. Але спочатку визначення.

Визначення 14.7. Ряд, складений з елементів

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

називається *гармонічним* рядом.

Приклад 14.2. Встановити збіжність гармонічного ряду.

Розв'язання. Загальний член ряду прямує до нуля:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

тобто необхідна умова збіжності ряду виконана. Але цей ряд є розбіжним, що ми й доведемо.

Згрупуємо елементи ряду у такий спосіб: починаючи з третього по два, чотири, вісім, шістнадцять, ..., 2^n елементів.

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Замінімо елементи ряду меншими та доведемо, що навіть сума менших елементів буде прямувати до нескінченності. У кожній із дужок замінімо всі елементи останнім з них:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Сума елементів в кожній з дужок стала дорівнювати $\frac{1}{2}$. З того, що таких дужок можна брати скільки завгодно, зрозуміло, що сума ряду прямує до нескінченності, а тому ряд буде розбіжним. Ряд, який ми взяли для досліджування за умовою, має більші елементи, тому його сума теж буде прямувати до нескінченності. Робимо висновок, що, незважаючи на виконання необхідної умови збіжності ряду, *гармонічний ряд є розбіжним*.

14.4 Збіжність рядів з додатними членами. Достатні ознаки збіжності ряду

14.4.1 Ознака порівняння

Теорема 14.5. Нехай дано два ряди

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + \dots + u_i + \dots \quad (u_i > 0)$$

i

$$\sum_{i=1}^{\infty} v_i = v_1 + v_2 + \dots + v_i + \dots \quad (v_i > 0).$$

і нехай кожен елемент першого ряду не перевищує відповідного елементу другого ряду, тобто

$$u_i \leq v_i, \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Тоді з умови збіжності другого ряду впливає збіжність першого ряду, і, навпаки, з умови розбіжності першого ряду впливає розбіжність другого ряду.

Доведення. Доведемо спочатку першу частину твердження. Запишемо n -ті часткові суми

$$s_n = \sum_{i=1}^n u_i, \quad \sigma_n = \sum_{i=1}^n v_i.$$

За умовою другий ряд збігається, тому існує границя часткових сум і $\sigma_n < \sigma$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$). З того, що кожен елемент першого ряду не перевищує відповідного елемента другого ряду, для часткових сум буде виконуватися умова

$$s_n \leq \sigma_n < \sigma,$$

тобто існує границя часткових сум і першого ряду, а тому перший ряд теж збігається.

Доведемо другу частину твердження. З умови розбіжності першого ряду випливає, що часткові суми необмежено зростають $s_n \rightarrow \infty$.

За умовою $\sigma_n \geq s_n$, тобто і $\sigma_n \rightarrow \infty$. Тому з розбіжності першого ряду випливає розбіжність другого.

Теорема доведена.

Зауваження. Зазвичай ознаку порівняння зручніше застосовувати у граничному вигляді, а саме: якщо границя відношення u_n і v_n існує та не дорівнює нулю,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A > 0. \quad (14.5)$$

то обидва ряди або збігаються, або розбігаються.

У читача виникає питання: а з чим порівнювати? Звичайно з рядами, збіжність яких встановлена раніше. Ми запропонуємо для порівняння два ряди:

- геометрична прогресія

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n, \quad \begin{cases} \text{при } q < 1, & \text{збігається;} \\ \text{при } q \geq 1, & \text{розбігається;} \end{cases} \quad (14.6)$$

- узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}, \quad \begin{cases} \text{при } q > 1, & \text{збігається;} \\ \text{при } q \leq 1, & \text{розбігається.} \end{cases} \quad (14.7)$$

Умови збіжності геометричної прогресії нами вже були доведені в прикладі 14.1, а збіжність узагальненого гармонічного ряду встановимо трохи пізніше (розбіжність гармонічного ряду при $q = 1$ ми довели в прикладі 14.2).

Приклад 14.3. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 3^n}{15^n}.$$

Розв'язання: Випишемо загальний член ряду и виконаємо перетворення, а саме: почленно поділимо чисельник на знаменник

$$u_n = \frac{5^n + 3^n}{15^n} = \frac{5^n}{15^n} + \frac{3^n}{15^n} = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}.$$

У наслідок цього ми отримали дві спадні геометричні прогресії ($q_1 = \frac{1}{3} < 1$, $q_2 = \frac{1}{5} < 1$), а тому за ознакою порівняння (14.6) цей ряд збігається.

Приклад 14.4. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(n+5)}.$$

Розв'язання. Випишемо загальний член ряду и виконаємо перетворення

$$u_n = \frac{1}{(2n+1)(n+5)} = \frac{1}{2n^2 + 11n + 5}.$$

Як еталонний візьмемо узагальнений гармонічний ряд $v_n = \frac{1}{n^2}$ з $q = 2 > 1$, збіжність якого відома (14.7). Обчислимо границю відношення (наприклад, двічі застосувавши правило Лопіталя):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n^2 + 11n + 5}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2 + 11n + 5} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{4n + 11} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0. \end{aligned}$$

За умовою (14.5) заданий ряд також збігається.

14.4.2 Ознака Даламбера

Теорема 14.6. Нехай дано ряд з додатними членами

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (u_n > 0).$$

Якщо існує границя відношення наступного елемента ряду до попереднього

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = C,$$

то при $C < 1$ ряд збігається, при $C > 1$ - розбігається, при $C = 1$ може як збігатися, так і розбігатися (потребує додаткового дослідження), тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = C = \begin{cases} C < 1, & \text{ряд збігається;} \\ C > 1, & \text{ряд розбігається;} \\ C = 1, & \text{додатк. дослідж.} \end{cases} \quad (14.8)$$

Доведення. Нехай $C < 1$. За властивістю границь при всіх $n \geq N$ виконується нерівність

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = C + \varepsilon = C_1,$$

де ε - нескінченно мала, при цьому $C_1 = C + \varepsilon < 1$. Тому

$$\frac{u_{N+1}}{u_N} < C_1, \quad \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} < C_1, \quad \frac{u_{N+3}}{u_{N+2}} < C_1, \quad \dots \quad \text{тощо.}$$

Звідси маємо

$$\begin{aligned} u_{N+1} &< C_1 u_N, \\ u_{N+2} &< C_1 u_{N+1}, \\ u_{N+3} &< C_1 u_{N+2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Звідси випливає, що члени ряду

$$u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \dots$$

який є залишком заданого ряду менше відповідних членів спадної геометричної прогресії. Тобто N -й залишок ряду збігається, тому збігається й заданий ряд.

Розглянемо випадок, коли $C > 1$. Тоді можна вибрати таке значення N , що при $n \geq N$ виконується нерівність

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > C - \varepsilon = C_1,$$

де ε - нескінченно мала, при цьому $C_1 = C - \varepsilon > 1$. Але тепер кожен наступний елемент ряду буде більший за попередній. Для

такого ряду не буде виконуватися необхідна умова збіжності ряду (14.4), а тому ряд є розбіжним.

При $C = 1$ ознаку Даламбера застосовувати не можна.

Зауваження. Ознаку Даламбера зазвичай застосовують, якщо загальний член ряду містить показникову функцію або факторіал.

Приклад 14.5. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{7^n}.$$

Розв'язання. Випишемо загальний член ряду, та член ряду, який слідує за ним, спростимо отриманий вираз та скористаємося ознакою Даламбера (14.8). Наш вибір обумовлений тим, що загальний член ряду містить показникову функцію:

$$u_n = \frac{n^3 + 1}{7^n}; \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)^3 + 1}{7^{n+1}} = \frac{(n+1)^3 + 1}{7^n \cdot 7}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^3 + 1}{7^n \cdot 7}}{\frac{n^3 + 1}{7^n}} = \frac{1}{7} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + 1}{n^3 + 1} = \frac{1}{7}.$$

Границю обчислили, порівнявши максимальні степені чисельника та знаменника (5.9). Ми отримали $C = \frac{1}{7} < 1$, тобто ряд збігається.

Приклад 14.6. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n!}{3^n(n+1)}.$$

Розв'язання. Випишемо загальний член ряду, та член ряду, який слідує за ним, спростимо отриманий вираз та

скористаємося ознакою Даламбера (14.8). Наш вибір обумовлений тим, що загальний член ряду містить показникову функцію та факторіал:

$$u_n = \frac{5n!}{3^n(n+1)}; \quad u_{n+1} = \frac{5(n+1)!}{3^{n+1}(n+1+1)} = \frac{5n!(n+1)}{3^n \cdot 3(n+2)};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5n!(n+1)}{3^n \cdot 3(n+2)}}{\frac{5n!}{3^n(n+1)}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n+2} = \infty.$$

Границю обчислили, порівнявши максимальні степені чисельника та знаменника (5.9). Ми отримали $C = \infty > 1$, тобто ряд розбігається.

14.4.3 Радикальна ознака Коші

Теорема 14.7. Нехай дано ряд з додатними членами

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (u_n > 0).$$

Якщо існує границя кореня n -й степені загального члена ряду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = C,$$

то при $C < 1$ ряд збігається, при $C > 1$ - розбігається, при $C = 1$ може як збігатися, так і розбігатися (потребує додаткового дослідження), тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = C = \begin{cases} C < 1, & \text{ряд збігається;} \\ C > 1, & \text{ряд розбігається;} \\ C = 1, & \text{додатк. дослідж.} \end{cases} \quad (14.9)$$

Доведення: Аналогічно до теореми 14.6, тому пропонуємо читачеві провести його самостійно.

Зауваження. Радикальну ознаку Коші зазвичай застосовують, якщо загальний член ряду в степені n або кратній n .

Приклад 14.7. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{n^4 + 3} \right)^n.$$

Розв'язання. Випишемо загальний член ряду та скористаємося радикальною ознакою Коші (14.9). Наш вибір обумовлений тим, що загальний член ряду в степені n :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\arcsin \frac{1}{n^4 + 3} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1}{n^4 + 3} = \\ &= \arcsin \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4 + 3} = \arcsin 0 = 0 < 1. \end{aligned}$$

Ми отримали $C = \frac{1}{7} < 1$, тобто ряд збігається.

Приклад 14.8. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}.$$

Розв'язання. Випишемо загальний член ряду та скористаємося радикальною ознакою Коші (14.9). Наш вибір обумовлений тим, що загальний член ряду в степені, кратній n :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{2}{e} < 1. \end{aligned}$$

При обчисленні границі ми застосували другу чудову границю (5.11), отримали $C = \frac{1}{7} < 1$, тобто ряд збігається.

14.4.4 Інтегральна ознака Коші

Теорема 14.8. Нехай дано ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (u_n > 0),$$

члени якого є значеннями неперервної функції $f(n)$ при цілих значеннях аргументу n :

$$u_1 = f(1), \quad u_2 = f(2), \quad \dots, \quad u_n = f(n), \quad \dots,$$

і нехай $f(x)$ монотонно спадає в інтервалі $(1; \infty)$. Тоді, якщо невласний інтеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ збігається, то збігається й відповідний ряд, і, навпаки, якщо невласний інтеграл розбігається, то розбігається й відповідний ряд. Тобто

$$\int_1^\infty f(x)dx = \begin{cases} A (\neq \infty), & \text{ряд } \sum_{n=1}^\infty u_n \text{ збігається;} \\ \infty \text{ (або не існує),} & \text{ряд } \sum_{n=1}^\infty u_n \text{ розбігається.} \end{cases} \quad (14.10)$$

Доведення. Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену лінією $y = f(x)$, віссю абсцис та лініями $x = 1$ і $x = n$ де n - довільне ціле число (рис. 14.1). Її площу можна обчислити за допомогою інтеграла

$$I_n = \int_1^n f(x) dx.$$

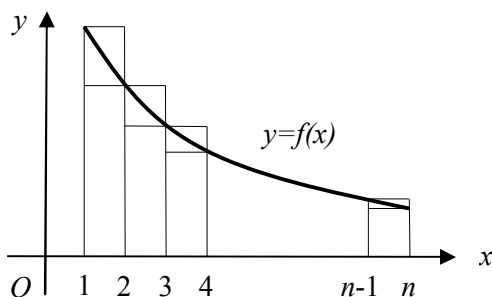


Рисунок 14.1 – Криволінійна трапеція

Розглянемо дві ступінчасті фігури, складені з прямокутників. Перша з них складається з прямокутників, довжина яких дорівнює значенню функції в кінці часткової області (її площа дорівнює $f(2) + f(3) + \dots + f(n) = s_n - u_1$), а друга - з прямокутників, довжина яких дорівнює значенню функції в початку часткової області (її площа дорівнює $f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) = s_n - u_n$), де $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Площа першої фігури менша за площу криволінійної трапеції, а площа другої – більше. Тобто ми маємо

$$s_n - u_1 < I_n < s_n - u_n.$$

Звідси отримаємо дві нерівності

$$s_n < I_n + u_1 \quad \text{і} \quad s_n > I_n + u_n.$$

З умови додатності функції $f(x)$ зрозуміло, що інтеграл I_n повинен зростати з ростом n , тому розглянемо два можливих випадки:

1) невластний інтеграл збігається, тобто існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I$, тому з нерівності $s_n < I_n + u_1$ при будь-якому n знаходимо $s_n < I + u_1$. Отже, часткові суми s_n обмежені, тому ряд збігається;

2) невластний інтеграл розбігається, тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \infty$ і з нерівності $s_n > I_n + u_n$ робимо висновок, що s_n також необмежені, тому ряд розбігається.

Зауваження. До усіх ознак ми надали невеличкі підказки, дають змогу нам обрати їх для дослідження збіжності рядів з додатними членами. Як бути з інтегральною ознакою? По-перше, відзначимо, що це «найсильніша» ознака. Тобто, у тих випадках, коли ми казали, що ознака «не працює» - потребується додаткове дослідження – ми будемо користатися саме інтегральною ознакою. По-друге, не потрібно звертатися до потужнішого інструменту, коли проблему можна вирішити без його застосування. Тобто, якщо можна обійтися без інтегрування, спробуйте скористатися іншими вже знайомими нам ознаками.

Приклад 14.9. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}.$$

Розв'язання: З узагальненим гармонічним рядом ми вже познайомилися (14.7), але довести, за яких умов він збігається або розбігається домовилися пізніше. Спробуємо скористатися інтегральною ознакою Коші. Поставимо у відповідність загальному члену ряду функцію

$$u_n = \frac{1}{n^q} \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x^q}.$$

За формулою (14.10) маємо

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^q} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{1-q}}{1-q} \right|_1^N = \frac{1}{1-q} \lim_{N \rightarrow \infty} (N^{1-q} - 1).$$

Розглянемо всі можливі випадки:

1) якщо $q > 1$, то $\lim_{N \rightarrow \infty} (N^{-q+1} - 1) = 0$ і $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^q} = \frac{1}{q-1}$.

Невласний інтеграл збігається, тому збігається й заданий ряд;

2) якщо $q < 1$, то $\lim_{N \rightarrow \infty} (N^{1-q} - 1) = \infty$ і $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^q} = \infty$.

Невласний інтеграл розбігається, тому розбігається й заданий ряд;

3) якщо $q < 1$, то маємо

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln N - \ln 1 = \infty,$$

тобто невласний інтеграл розбігається, тому розбігається й заданий ряд.

Висновки, які ми отримали за інтегральною ознакою Коші цілком збігаються з приведеними раніше (14.7).

Приклад 14.10. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4) \ln(n+4) \ln(\ln(n+4))}.$$

Розв'язання. Спробуємо обрати ознаку, за якою проведемо дослідження на збіжність. Зрозуміло, що порівнювати загальний член ряду нам немає з чим; використання ознаки Даламбера приведе нас до випадку $C = 1$, тобто потребує від нас додаткового дослідження, отже ознака Даламбера тут не працює; використання радикальної ознаки Коші ще більш ускладнить ситуацію. Тому висновок очевидний – необхідно звернутися до інтегральної ознаки Коші. Поставимо у відповідність загальному члену ряду функцію

$$u_n = \frac{1}{(n+4) \ln(n+4) \ln(\ln(n+4))} \rightarrow f(x) = \frac{1}{(x+4) \ln(x+4) \ln(\ln(x+4))}$$

і проінтегруємо її (14.10) методом заміни змінної:

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+4) \ln(x+4) \ln(\ln(x+4))} = \\
 &= \left[\begin{array}{l} u = \ln(\ln(x+4)) \\ du = \frac{dx}{(x+4) \ln(x+4)} \\ u_H = \ln \ln 5 \\ u_B = \infty \end{array} \right] = \\
 &= \int_{\ln \ln 5}^{\infty} \frac{du}{u} = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln x \Big|_{\ln \ln 5}^N = \infty - \ln \ln \ln 5 = \infty.
 \end{aligned}$$

Невласний інтеграл розбігається, тому розбігається й заданий ряд.

14.5 Збіжність знакозмінних рядів.

Необхідна ознака збіжності.

Теорема Лейбниця

Розглянемо числові ряди, складені з елементів, кожний з яких має знак, обернений до попереднього (14.2). Дати відповідь на запитання про збіжність таких рядів можливо за допомогою теореми Лейбниця.

Теорема Лейбниця. Якщо в знакозмінному ряді

$$\pm(u_1 - u_2 + \dots - u_n + \dots)$$

виконуються умови:

1) абсолютні величини членів ряду спадають, тобто

$$u_1 > u_2 > \dots > u_n > \dots; \quad (14.11)$$

2) загальний член ряду u_n прямує до нуля

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0, \quad (14.12)$$

то ряд *збігається*, при цьому його сума s_n за абсолютною величиною менше першого елемента ряду $|s_n| < u_1$; а залишок ряду r_n за абсолютною величиною менше абсолютної величини першого з членів, що відкидаються: $|r_n| < u_{n+1}$.

Доведення: Розглянемо для визначеності ряд, перший елемент якого додатний:

$$u_1 - u_2 + \dots - u_n + \dots$$

Складемо послідовність часткових сум з парними індексами у вигляді

$$s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

За першою умовою теореми в кожній із дужок ми маємо додатні елементи. Кількість дужок зі зростанням m збільшується, тому послідовність s_{2m} буде зростаючою.

Складемо послідовність часткових сум з непарними індексами у вигляді

$$s_{2m+1} = u_1 - [(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \dots + (u_{2m} - u_{2m+1})].$$

Вона є спадною, оскільки в квадратних дужках ми отримали зростаючу послідовність, яку будемо віднімати від першого елемента ряду.

Отже, маємо

$$s_2 < s_4 < s_6 < \dots \quad \text{і} \quad s_1 > s_3 > s_5 > \dots$$

Зауважимо, що будь-яка сума з непарним індексом менша відповідної суми з непарним індексом $s_{2m} < s_{2k+1}$.

Дійсно, якщо $m < k$, то

$$s_{2m} < s_{2k} = s_{2k+1} - u_{2k+1} < s_{2k+1}.$$

А якщо $m > k$ або $m = k$, то

$$s_{2m} = s_{2m+1} - u_{2m+1} < s_{2m+1} < s_{2k+1}.$$

Приведемо графічну ілюстрацію послідовності часткових сум (рис. 14.2).

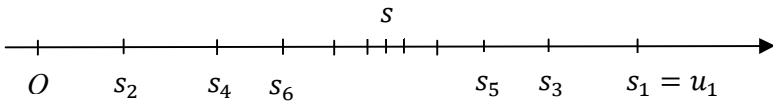


Рисунок 14.2 - Графічна ілюстрація послідовності часткових сум

Послідовність часткових сум із парним індексом зростаюча, але обмежена зверху, тому має границю

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} = s.$$

Зрозуміло, що послідовність часткових сум з непарним індексом можна подати у вигляді

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}.$$

За умовою (2) теореми $\lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = 0$, тому

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} = s.$$

тобто послідовність часткових сум з непарним індексом спадає, але має ту саму границю.

За приведеною графічною ілюстрацією (рис. 14.2) також робимо висновок, що послідовність часткових сум s_n прямує до границі та є коливальною; сума ряду менша за будь-яку суму з

непарним індексом, а тому буде менше, ніж перший елемент ряду u_1 .

Якщо розглядати знакозмінний ряд, перший елемент якого від'ємний, то всі міркування проводяться ідентично, а наведену нами графічну ілюстрацію (рис. 14.2) необхідно буде симетрично відобразити відносно початку координат.

Залишок ряду, отриманий шляхом відкидання перших n елементів

$$r_n = \pm(u_{n+1} + u_{n+2} + \dots)$$

є рядом, який задовольняє всім умовам теореми Лейбниця. Тому його сума за абсолютною величиною менше першого елемента ряду, тобто $|r_n| < u_{n+1}$, що і треба було довести.

Наприклад, ряд, складений з елементів

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \pm \frac{1}{n} + \dots$$

за теоремою Лейбниця збігається, тому що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

14.6 Збіжність знакозмінних рядів.

Достатня ознака збіжності

Теорема 14.9 (достатня ознака збіжності). Якщо ряд, складений з абсолютних величин знакозмінного ряду, збігається, то збігається й заданий ряд.

Доведення. Позначимо як s_n суму перших n членів ряду, а через s_n^+ - суму всіх додатних елементів, в через s_n^- - суму всіх від'ємних елементів серед перших елементів ряду. Маємо

$$s_n = s_n^+ - s_n^- \quad \text{і} \quad \sigma_n = s_n^+ + s_n^-$$

де

$$\sigma_n = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|$$

За умовою σ_n має границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$, а s_n^+ і s_n^- - додатні та зростаючі функції від кількості елементів n . Причому $s_n^+ \leq \sigma_n < \sigma$ і $s_n^- \leq \sigma_n < \sigma$, тому вони мають границі. Унаслідок цього функція $s_n = s_n^+ - s_n^-$ при $n \rightarrow \infty$ має границю, що й потрібно було довести.

Ця достатня умова не є необхідною. Тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ може збігатися і в тих випадках, коли ряд, складений з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, розбігається. Наприклад, для ряду

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \pm \frac{1}{n} + \dots$$

ми вже показали виконання умов теореми Лейбниця та встановили його збіжність, а ряд, складений із його абсолютних величин – гармонічний ряд –

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

розбігається (приклад 14.2).

Визначення 14.8. Ряд, абсолютні величини членів якого утворюють збіжний ряд, називається **абсолютно збіжним**. Якщо ряд збігається, а ряд, складений з абсолютних величин його членів, розбігається, такий ряд називається **умовно збіжним**.

Наприклад, ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \pm \frac{1}{n} + \dots$ є умовно збіжним.

Зауваження. Встановлювати умовну збіжність можна за допомогою будь-якої з вивчених ознак збіжності рядів із додатними членами.

Приклад 14.11. Дослідити на абсолютну або умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}.$$

Розв'язання. Перевіримо виконання умови теореми Лейбниця (14.11), (14.12):

$$1 > \frac{1}{27} > \frac{1}{125} > \dots;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-1)^3} = 0.$$

Вони виконуються. Перевіримо виконання достатньої умови збіжності. Для цього ряд, складений з абсолютних елементів, дослідимо за допомогою ознаки порівняння в граничному вигляді (14.5). Порівнювати будемо з узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ з $q = 3$, який збігається:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(2n-1)^3}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{(2n-1)^3} = \frac{1}{8}.$$

Отже, умова виконана, тому ряд абсолютно збігається.

Приклад 14.12. Дослідити на абсолютну або умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{1+n^2}.$$

Розв'язання. Перевіримо виконання умови теореми Лейбниці (14.11), (14.12):

$$1 > \frac{2}{5} > \frac{3}{10} > \dots,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 + n^2} = 0.$$

Вони виконуються. Перевіримо виконання достатньої умови збіжності. Для цього ряд, складений з абсолютних елементів, дослідимо за допомогою інтегральної ознаки Коші:

$$u_n = \frac{n}{1 + n^2} \rightarrow f(x) = \frac{x}{1 + x^2};$$

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{x dx}{1 + x^2} = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{d(1 + x^2)}{1 + x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \ln(1 + x^2) \Big|_1^N = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \ln(1 + N^2) - \frac{1}{2} \ln 2 = \infty.$$

Невласний інтеграл розбігається, тому достатня умова невиконана. Отже, ряд збігається умовно.

Приклад 14.13. Дослідити на абсолютну або умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n-1}.$$

Розв'язання. Перевіримо виконання умови теореми Лейбниці (14.11), (14.12):

$$1 > \frac{2}{3} > \frac{3}{5} > \dots;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Перша з умов виконуються, а друга - ні. Тому ряд розбігається.

Контрольні питання

1. Дайте визначення числового ряду.
2. Що таке загальний член ряду, часткова сума ряду?
3. Який числовий ряд називається збіжним (розбіжним)?
4. Назвіть відомі вам властивості числових рядів.
5. Сформулюйте необхідну умову збіжності ряду.
6. Які достатні умови збіжності рядів із додатними членами ви знаєте?
7. З якими рядами найчастіше порівнюють задані числові ряди? Якими способами можна записати ознаку порівняння? Який спосіб вам подобається більше?
8. Сформулюйте ознаку Даламбера. Для дослідження яких рядів її зручніше застосовувати?
9. Сформулюйте радикальну ознаку Коші. Для дослідження яких рядів її зручніше застосовувати?
10. Сформулюйте інтегральну ознаку Коші. Для дослідження яких рядів її зручніше застосовувати?
11. Які особливості дослідження збіжності знакозмінних числових рядів?
12. Сформулюйте необхідну ознаку збіжності знакозмінних числових рядів.
13. Сформулюйте достатню ознаку збіжності знакозмінних числових рядів.

Розділ 15 ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

15.1 Загальні визначення

Визначення 15.1. Ряд, членами якого є не числа, а функції, називається *функціональним рядом*:

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (15.1)$$

Для визначення функціонального ряду вважаємо, що всі функції $u_n(x)$ неперервні та визначені в одному тому самому інтервалі (скінченному або нескінченному).

Ряд (15.1) при різних значеннях x може бути збіжним або розбіжним.

Визначення 15.2. Значення $x = x_0$, при яких числовий ряд, утворений з функціонального ряду,

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots$$

збігається, називається *точкою збіжності функціонального ряду*.

Визначення 15.3. Сукупність всіх точок збіжності ряду називається *областю збіжності ряду*.

Приклад 15.1. Знайти область збіжності ряду

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

Розв'язання. Цей ряд – це геометрична прогресія. Нам вже встановлено (приклад 14.1), що він збігається при $|x| < 1$ і розбігається при $|x| \geq 1$. Сума ряду може бути визначена лише в області збіжності ряду $x \in (-1; 1)$ і, як нами було раніше встановлено, вона дорівнює $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

Отже, якщо функціональний ряд збігається при деякому значенні x , то справедливо таке

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = S(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0.$$

Ми помітили аналогію у визначеннях числових та функціональних рядів. Тому виникає питання, а чи можна перенести властивості числових рядів на функціональні, і за яких умов?

Визначення 15.4. Функціональний ряд (15.1) називається **правильно збіжним** в області D , яка належить області збіжності ряду, якщо в області D усі його члени за абсолютною величиною не перебільшують відповідних членів деякого збіжного числового ряду з додатними членами.

Тобто в області D повинна виконуватися умова

$$|u_n(x)| \leq M_n,$$

де M_n - члені збіжного числового ряду, який називається **мажорувальним** (підсилювальним) функціональним рядом (15.1).

Приклад 15.2. Встановити збіжність ряду

$$\cos x + \frac{\cos 2x}{2^3} + \frac{\cos 3x}{3^3} + \dots + \frac{\cos nx}{n^3} + \dots$$

Розв'язання. Кожний елемент функціонального ряду менше відповідних елементів збіжного узагальненого гармонічного ряду

$$\left| \frac{\cos nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3},$$

тому заданий ряд є правильно збіжним.

15.2 Властивості правильно збіжних функціональних рядів

Теорема 15.1. Якщо ряд, складений із неперервних функцій, правильно збігається в області D , то сума його елементів є функція неперервна в тієї самій області.

Теорема 15.2. Якщо ряд, складений із неперервних функцій, правильно збігається, то інтеграл від суми ряду дорівнює сумі ряду, складеного з інтегралів від членів цього ряду:

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \dots + \int_a^b u_n(x)dx + \dots \quad (15.2)$$

Тобто правильно збіжний ряд можна інтегрувати.

Теорема 15.3. Якщо ряд, складений із неперервних функцій, які мають неперервні похідні, правильно збігається в області D і його сума дорівнює $S(x)$, то ряд з похідних $u'_n(x)$ з в області D , збігається в цій області правильно, а похідна суми ряду $S'(x)$ дорівнює сумі похідних:

$$S'(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) + \dots \quad (15.3)$$

Тобто правильно збіжний ряд можна диференціювати.

Доведення цих теорем виходять за межі курсу.

У нашому курсі з усіх класів функціональних рядів ми розглянемо лише найважливіші: степеневі ряди та тригонометричні ряди.

15.3 Степеневі ряди. Теорема Абеля

Визначення 15.5. *Степеневим рядом* називається функціональний ряд

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots, \quad (15.4)$$

елементами якого є добуток сталих $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ та степеневі функції з цілими показниками від різниці $(x - x_0)$.

Сталі $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ називаються **коефіцієнтами степеневого ряду**.

Окремим випадком степеневого ряду є ряд по степенях $x_0 = 0$:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (15.5)$$

Для зручності ми будемо вивчати саме ряди виду (15.5), оскільки ряд загального вигляду (15.4) можна перетворити до ряду (15.5) підстановкою $\bar{x} = x - x_0$.

Зауваження. Надалі для зручності n -тим членом степеневого ряду будемо вважати член a_nx^n , незважаючи на те, що він розташований на $(n + 1)$ -тому місці, а вільний член a_0 будемо вважати нульовим членом ряду.

Як і раніше, нас буде цікавити питання збіжності рядів. Для цього приведемо з доведенням таку теорему.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд (15.5) збігається в точці $x_0 \neq 0$, то он збігається, причому абсолютно при будь-якому $|x| < |x_0|$.

Доведення. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx_0^n$ збігається, то його загальний член прямує до нуля $\lim_{n \rightarrow \infty} a_nx_0^n = 0$. Тому всі члені цього ряду обмежені: $|a_nx_0^n| < M$.

Запишемо ряд (15.5) у вигляді

$$a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0} \right) + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 + \dots + a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0} \right)^n + \dots$$

та складемо ряд з абсолютних величин членів цього ряду:

$$a_0 + |a_1 x_0| \left| \frac{x}{x_0} \right| + |a_2 x_0^2| \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots$$

З наведеної умови обмеженості цього ряду випливає, що кожний член ряду менше відповідного члену геометричної прогресії зі знаменником $\left| \frac{x}{x_0} \right|$:

$$M + M \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots$$

Якщо $|x| < |x_0|$, то $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ і прогресія збігається, а тому збігається і ряд, складений з абсолютних величин, і сам ряд (15.5). Теорема доведена.

Наслідок: Якщо степеневий ряд (15.5) розбігається при $x = x_0$, то він розбігається при будь-якому $x > x_0$.

15.4 Область збіжності степеневому ряду.

Радіус збіжності степеневому ряду

Для степеневому ряду (15.5) можливі три типи областей збіжності.

I. **Область збіжності – одна точка.** Тобто ряд збігається в одній точці $x = 0$, в усіх інших точках – розбігається. Наприклад, розглянемо ряд

$$1 + x + 2^2 x^2 + \dots + n^n x^n + \dots$$

При $x = 0$ загальний член ряду прямує до нуля, а сума ряду дорівнює одиниці. При $x \neq 0$ для будь-якого x знайдеться таке n , що $|nx| > 1$, тому $|n^n x^n| > 1$. З цього випливає, що загальний член ряду не прямує до нуля, а отже ряд розбігається.

II. Область збіжності – вся числова вісь. Тобто ряд збігається при будь-яких значеннях x . Наприклад, розглянемо ряд

$$1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{n^n} + \dots$$

Для будь-якого значення x знайдеться таке значення n , що $\left|\frac{x}{n}\right| < 1$. Отже, буде виконуватися умова

$$\left|\frac{x}{n+1}\right|^{n+1} < \left|\frac{x}{n}\right|^{n+1}; \quad \left|\frac{x}{n+2}\right|^{n+2} < \left|\frac{x}{n}\right|^{n+2}; \quad \dots$$

Тобто починаючи з деякого n члени ряду за абсолютною величиною будуть менше відповідних членів спадної геометричної прогресії. Отже, ряд збігається при всіх значеннях x .

III. Область збіжності – скінчена множина точок. Тобто на числовій осі існують точки, при яких ряд збігається, і точки, при яких ряд розбігається. Розглянемо, наприклад, ряд

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

який є геометричною прогресією: спадною при $|x| < 1$, зростаючою при $|x| \geq 1$. Тобто ряд збігається при $|x| < 1$, і розбігається при $|x| \geq 1$.

З усього зазначеного випливає, що для всіх степеневих рядів, які мають як точки збіжності, так і точки розбіжності, існує таке додатне число R , що для всіх $|x| < R$ ряд абсолютно збігається, а для всіх $|x| > R$ ряд розбігається.

При $x = R$ і $x = -R$ можливі ситуації: ряд може збігатися або розбігатися в двох точках одночасно або в одній із них; якщо в деякій із точок утворюється знакзмінний ряд, то він може збігатися абсолютно або умовно.

Визначення 15.6. Радіусом збіжності степеневому ряду (15.5) таке додатне число R , що для всіх $|x| < R$ степеневий ряд збігається, а для всіх $|x| > R$ - розбігається. Інтервал $(-R; R)$ називається **інтервалом збіжності**.

Зауваження 1. Для рядів виду (15.4) усі наведені твердження справедливі. Різниця полягає лише в тому, що центр інтервалу збіжності буде розташований не в точці $x = 0$, а в точці $x = x_0$. Тобто інтервалом збіжності буде інтервал $(x_0 - R; x_0 + R)$.

Зауваження 2. Для встановлення області збіжності необхідно перевірити збіжність ряду на кінцях інтервалу – у точках $x = R$ і $x = -R$.

Вкажемо найпоширеніші алгоритми знаходження радіуса та області збіжності степеневих рядів. По-перше, для їх встановлення можна дослідити ряд, складений з абсолютних величин членів цього ряду:

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + \dots + |a_n||x|^n + \dots,$$

оскільки їх радіус та області збіжності співпадають.

По-друге, для рядів із додатними членами нами раніше були вказані ознаки збіжності. Ми будемо використовувати ознаку Даламбера та радикальну ознаку Коші.

За ознакою Даламбера маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1} \cdot x}{a_nx^n} \right| =$$

$$= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1;$$

позначимо $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$, звідси

$$|x| \cdot \frac{1}{R} < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| < R; \quad x \in (-R; R).$$

За радикальною ознакою Коші маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1;$$

позначимо $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}}$, звідси

$$|x| \cdot \frac{1}{R} < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| < R; \quad x \in (-R; R).$$

У випадку, коли ряд містить лише парні степені

$$a_0 + a_2 x^2 + \dots + a_{2n} x^{2n} + \dots,$$

маємо, наприклад, за ознакою Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2n+2} x^{n+2}}{a_{2n} x^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2n+2} x^{2n} \cdot x^2}{a_{2n} x^{2n}} \right| = x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} < 1;$$

позначимо $R^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n+2}}$, звідси

$$x^2 \cdot \frac{1}{R^2} < 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 < R^2; \quad |x| < R; \quad x \in (-R; R).$$

Приклад 15.3. Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)5^n}.$$

Розв'язання. Скористаємося ознакою Даламбера. Випишемо загальний член ряду та елемент, який прямує за ним:

$$u_n = \frac{x^n}{(n+3)5^n}; \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1+3)5^{n+1}} = \frac{x^n \cdot x}{(n+4)5^n \cdot 5}.$$

Підставимо в формулу та виконаємо необхідні перетворення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^n \cdot x}{(n+4)5^n \cdot 5}}{\frac{x^n}{(n+3)5^n}} \right| = \frac{|x|}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+4} = \frac{|x|}{5};$$

$$\frac{|x|}{5} < 1; \quad |x| < 5; \quad -5 < x < 5.$$

Отже, радіус збіжності $R = 5$, а інтервал - $x \in (-5; 5)$. Для того щоб записати область збіжності, перевіримо збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$x = -5: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{(n+3)5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{(n+3)5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3)}.$$

Ми отримали знакозмінний числовий ряд. Перевіримо виконання умов теореми Лейбниця: $\frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6} > \dots$; $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+3} = 0$. Вони виконуються. Перевіримо, чи буде збігатися ряд, складений з абсолютних величин членів даного ряду $u_n = \frac{1}{n+3}$. Для цього скористаємося граничною ознакою порівняння (14.5), порівнювати будемо з гармонічним рядом $v_n = \frac{1}{n+3}$, який розбігається:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+3}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+3} = 1,$$

тому розбігається й ряд, який досліджується. Отже, абсолютної збіжності встановити не вдалося. З того, що виконані умови теореми Лейбниця, робимо висновок, що в точці $x = -5$ ряд збігається умовно.

$$x = 5: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+3)5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}.$$

Ми отримали числовий ряд з додатними членами $u_n = \frac{1}{n+3}$, який (як ми встановили раніше) за ознакою порівняння розбігається.

Остаточно маємо область збіжності ряду $x \in [-5; 5)$

Приклад 15.4. Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n!}{n^2 + 4}.$$

Розв'язання. Скористаємося ознакою Даламбера. Випишемо загальний член ряду та елемент, який прямує за ним:

$$u_n = \frac{x^n n!}{n^2 + 4}; \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^2 + 4} = \frac{x^n \cdot x \cdot n! (n+1)}{(n+1)^2 + 4}.$$

Підставимо у формулу та виконаємо необхідні перетворення

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^n \cdot x \cdot n! (n+1)}{(n+1)^2 + 4}}{\frac{x^n n!}{n^2 + 4}} \right| = \\ &= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n^2 + 4)}{(n+1)^2 + 4} = |x| \cdot \infty; \\ |x| \cdot \infty &< 1; \quad |x| < \frac{1}{\infty}; \quad |x| < 0. \end{aligned}$$

Отже, радіус збіжності $R = 0$, тому інтервал збіжності – одна точка $x = 0$.

Приклад 15.5. Знайти область збіжності степеневому ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n \cdot 2^n}{(n+2)!}.$$

Розв'язання. Скористаємося ознакою Даламбера. Випишемо загальний член ряду та елемент, який прямує за ним:

$$u_n = \frac{(x-4)^n \cdot 2^n}{(n+2)!};$$

$$u_{n+1} = \frac{(x-4)^{n+1} \cdot 2^{n+1}}{(n+1+2)!} = \frac{(x-4)^n (x-4) \cdot 2^n \cdot 2}{(n+2)! (n+3)}.$$

Підставимо у формулу та виконаємо необхідні перетворення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(x-4)^n (x-4) \cdot 2^n \cdot 2}{(n+2)! (n+3)}}{\frac{(x-4)^n \cdot 2^n}{(n+2)!}} \right| =$$

$$= 2|x-4| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+3} = 2|x-4| \cdot 0;$$

$$|x-4| \cdot 0 < 1; \quad |x-4| < \frac{1}{0}; \quad |x-4| < \infty;$$

$$-\infty < x-4 < \infty; \quad -\infty < x < \infty.$$

Отже, радіус збіжності $R = \infty$, а інтервал – уся числова вісь $x \in (-\infty; \infty)$.

Приклад 15.6. Знайти область збіжності степеневому ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^{2n}}{9^n}.$$

Розв'язання. Скористаємося радикальною ознакою Коші. Підставимо в формулу та виконаємо необхідні перетворення:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(x+4)^{2n}}{9^n}} = \frac{(x+4)^2}{9}.$$

$$\frac{(x+4)^2}{9} < 1; \quad \frac{|x+4|}{3} < 1; \quad |x+4| < 3;$$

$$-3 < x+4 < 3; \quad -7 < x < -1.$$

Отже, радіус збіжності $R = 3$, а інтервал - $x \in (-7; -1)$. Для того, щоб записати область збіжності, перевіримо збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$x = -7: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-7+4)^{2n}}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^{2n}}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1.$$

Загальний член ряду не прямує до нуля, тому цей ряд розбігається.

$$x = -1: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1+4)^{2n}}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^{2n}}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1.$$

Отримали той самий розбіжний ряд.

Остаточно маємо область збіжності степеневому ряду $x \in (-7; -1)$.

15.5 Властивості степеневих рядів

1. Сума степеневого ряду є функцією неперервною в інтервалі збіжності ряду:

$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots,$$

де $x \in (-R; R)$ - інтервал збіжності ряду. Якщо ряд збігається в будь-якому кінці інтервалу, то в цій точці його сума $S(x)$ залишається неперервною функцією.

2. Степеневий ряд можна диференціювати в інтервалі збіжності:

$$S'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots, \quad (15.6)$$

де $x \in (-R; R)$ - інтервал збіжності ряду.

Зауважимо, що степеневий ряд можна диференціювати будь-яку кількість разів в його області збіжності:

$$\begin{aligned} S'' &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots; \\ S''' &= 3 \cdot 2a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} + \dots; \\ &\dots \end{aligned}$$

3. Степеневий ряд можна інтегрувати в інтервалі збіжності:

$$\begin{aligned} \int_0^x S(x)dx &= \int_0^x a_0dx + \int_0^x a_1xdx + \int_0^x a_2x^2dx + \dots + \\ &\quad + \int_0^x a_nx^ndx + \dots = \\ &= a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \dots \end{aligned} \quad (15.7)$$

де $x \in (-R; R)$ - інтервал збіжності ряду.

Наведені властивості ми будемо застосовувати у процесі подальшого вивчення степеневих рядів.

15.6 Розклад функцій у степеневі ряди.

Ряд Тейлора

У попередньому пункті ми з'ясували, що сума степеневому ряду є функцією неперервною в області збіжності ряду, яку можна нескінченне число разів диференціювати в області збіжності.

Степеневі функції дуже зручні в аналізі – з їх диференціюванням та інтегруванням не виникає проблем, тому питання, яке спробуємо сформулювати за розв'язати закономірно: в якому випадку можна стверджувати, чи є задана функція $f(x)$ сумою деякого степеневому ряду (або в якому випадку можна задану функцію $f(x)$ замінити степеневим рядом)? Якщо така можливість існує, то заміна складних трансцендентних функцій многочленами дасть змогу нам проводити наближені обчислення, знаходити розв'язки диференціальних рівнянь, інтегрувати функції, первісні яких знайти аналітично не можливо тощо.

Нехай функція $f(x)$ нескінченну кількість раз диференційована в околі точки x_0 . Припустимо, що її можна подати у вигляді суми степеневому ряду, який збігається в деякому інтервалі, який містить точку x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots, \quad (15.8)$$

де $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – невідомі коефіцієнти. Знайдемо їх, користуючись властивостями степеневих рядів. Для цього

знайдемо похідні функції $f(x)$ та обчислимо їхні значення в точці x_0 .

Обчислимо значення функції в точці x_0 :

$$f(x_0) = a_0.$$

Знайдемо похідну

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \dots$$

і обчислимо її значення в точці x_0 :

$$f'(x_0) = a_1.$$

Диференціюємо ще раз

$$f''(x) = 2a_2 + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \dots + \dots$$

маємо

$$f''(x_0) = 2a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}.$$

Закономірність ми вже можемо встановити. Після n -кратного диференціювання маємо

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + \dots;$$

$$f^{(n)}(x_0) = n! a_n \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Отже, коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ можуть бути виражені через відповідні похідні:

$$a_0 = f(x_0); \quad a_1 = f'(x_0); \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}; \quad \dots; \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}; \quad \dots \quad (15.9)$$

Після підстановки знайдених коефіцієнтів у розклад (15.8) отримуємо ряд

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \quad (15.10)$$

Визначення 15.7. Рядом Тейлора для функції $f(x)$ в околі точки x_0 називається степеневий ряд (15.10) відносно різності $(x - x_0)$, коефіцієнти якого виражаються через значення функції та їхніх похідних в точці x_0 за формулами (15.9). Коефіцієнти (15.9) називаються **коефіцієнтами Тейлора** для функції $f(x)$ у точці x_0 .

Формули (15.9), (15.10) ми отримали з припущенням, що такий розклад існує. З'ясуємо, за яких умов це можливо.

Позначимо n -часткову суму ряду Тейлора як

$$S_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (15.11)$$

Залишковим членом ряду є

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x). \quad (15.12)$$

Якщо ряд Тейлора збігається до функції $f(x)$ у будь-якій точці x з області збіжності отриманого степеневому ряду, то повинна виконуватися умова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$$

або

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

За залишком ряду $R_n(x)$ можна оцінити помилку, яка виникає у разі заміни функції $f(x)$ многочленом $S_n(x)$, що містить скінчену множину доданків. Величина залишкового члену ряду Тейлора може бути визначена за допомогою наступної теореми, яку приведемо без доведення.

Теорема 15.4. Якщо функція $f(x)$ в усіх точках деякого інтервалу, що містить точку x_0 , має $(n + 1)$ -шу похідну $f^{(n+1)}(x)$, то остаточно член $R_n(x)$ для будь-якої точки інтервалу має вигляд

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}, \quad (15.13)$$

де $\xi \in (x; x_0)$.

Доведення: теорема наводиться без доведення.

Вираз (15.13) для остаточного члену $R_n(x)$ не дає можливості обчислювати його величину, оскільки нам невідома точка ξ , у якій міститься $(n + 1)$ -ша похідна. У подальшому нам зручніше буде не обчислювати, а оцінювати величину остаточного члена ряду на підставі наступного зауваження.

Зауваження. Нехай в інтервалі, у якому виконується формула Тейлора, $(n + 1)$ -ша похідна за абсолютною величиною не перебільшує числа M_{n+1} :

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}.$$

Тоді для будь-якого x із цього інтервалу остаточно член ряду задовольняє умові

$$|R_n(x)| \leq M_{n+1} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (15.14)$$

Тепер з'ясуємо умову, за якою будь-яка функція може бути розкладена в ряд Тейлора.

Теорема 15.5. Якщо в деякому інтервалі, що оточує точку x_0 , абсолютні величини всіх похідних функції $f(x)$ обмежені одним тим самим числом, то функція $f(x)$ у цьому інтервалі розкладається в ряд Тейлора.

Доведення. Функція може бути розкладена в ряд, якщо для всіх точок інтервалу остаточно член ряду $R_n(x)$ прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$.

За умовою теореми в усіх точках інтервалу виконується умова

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M,$$

де M - стала, яка не залежить від n . Звідси за умовою (15.14)

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Не складно перевірити, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, звідси

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0,$$

що й потрібно було довести.

Приклад 15.7. Розкласти в ряд Тейлора функцію $f(x) = \frac{1}{x+3}$ в околі точки $x_0 = -1$.

Розв'язання. Обчислимо значення функції в точці $x_0 = -1$: $f(-1) = \frac{1}{2}$.

Знайдемо похідні та обчислимо їхні значення в точці $x_0 = -1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(x+3)^2}; & f'(-1) &= -\frac{1}{2^2}; \\ f''(x) &= \frac{1 \cdot 2}{(x+3)^3}; & f''(-1) &= \frac{2!}{2^3}; \\ f'''(x) &= -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(x+3)^4}; & f'''(-1) &= -\frac{3!}{2^4}; \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Ми помітили закономірність, отже, можемо записати вираз для n -ої похідної.

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x+3)^{n+1}}; \quad f^{(n)}(-1) = (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}.$$

Розклад функції у ряд Тейлора має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+3} &= \frac{1}{2} - \frac{1!}{1! \cdot 2^2}(x+1) + \frac{2!}{2! \cdot 2^3}(x+1)^2 - \frac{3!}{3! \cdot 2^4}(x+1)^3 + \dots \\ &+ (-1)^n \frac{n!}{n! \cdot 2^{n+1}}(x+1)^n + \dots = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Знайдемо інтервал збіжності отриманого ряду до заданої функції. Скористаємося ознакою Даламбера:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(x+1)^n}{2^{n+1}}; \quad u_{n+1} = \frac{(x+1)^{n+1}}{2^{n+1+1}} = \frac{(x+1)^n \cdot (x+1)}{2^{n+1} \cdot 2}; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+1)^n \cdot (x+1)}{2^{n+1} \cdot 2} \cdot \frac{2^{n+1}}{(x+1)^n} \right| = \frac{|x+1|}{2}; \\ \frac{|x+1|}{2} &< 1; \quad |x+1| < 2; \quad -2 < x+1 < 2; \quad -3 < x < 1. \end{aligned}$$

Перевіримо збіжність на кінцях інтервалу:

$$x = -3: \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-3+1)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-2)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0;$$

загальний член ряду не прямує до нуля, отже ряд розбігається.

$$x = 1: \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1+1)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0;$$

загальний член ряду не прямує до нуля, отже ряд розбігається.

Остаточно маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+3} &= \frac{1}{2} - \frac{(x+1)}{2^2} + \frac{(x+1)^2}{2^3} - \frac{(x+1)^3}{2^4} + \dots + \\ &\quad + (-1)^n \frac{(x+1)^n}{2^{n+1}} + \dots = \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{2^{n+1}} \quad \text{при } x \in (-3; 1). \end{aligned}$$

15.7 Ряд Маклорена.

Розклад елементарних функцій у ряд Маклорена

Під час розв'язання прикладних задач найчастіше використовують розклад функцій за степенями x . У такому випадку вважається $x_0 = 0$, тобто це – частинний випадок ряду Тейлора.

Визначення 15.8. Рядом Маклорена для функції $f(x)$ в околі точки $x_0 = 0$ називається розклад функції в степеневий

ряд за степенями x , коефіцієнти якого виражаються через значення функції та їхніх похідних у точці $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (15.15)$$

Знайдемо розклад основних елементарних функцій у ряд Маклорена. Алгоритм розв'язання, який ми застосували для розкладу функції в ряд Тейлора, зберігається. Єдина відмінність – значення функції та її похідних обчислюється в точці $x_0 = 0$.

1. Показникова функція $f(x) = e^x$.

Усі похідні функції e^x дорівнюють e^x . Їхні значення в точці $x = 0$ дорівнюють 1. Отже, за формулою (15.15) маємо

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Знайдемо інтервал збіжності отриманого ряду за ознакою Даламбера:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{x^n}{n!}; & u_{n+1} &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^n \cdot x}{n! \cdot (n+1)}; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n \cdot x}{n! \cdot (n+1)} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = |x| \cdot 0; \\ |x| \cdot 0 &< 1; & |x| &< \infty; & -\infty &< x < \infty. \end{aligned}$$

Інтервал збіжності – вся числова вісь. Остаточного маємо

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \text{при } x \in (-\infty; \infty). \quad (15.16)$$

2. Тригонометричні функції

$$f(x) = \sin x \text{ і } f(x) = \cos x.$$

Розкладемо в ряд Маклорена функцію $y = \sin x$. Для цього обчислимо значення функції у точці $x = 0$, знайдемо похідні та обчислимо їх значення в цієї ж точці:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0; \\ f'(x) &= \cos x; & f'(0) &= 1; \\ f''(x) &= -\sin x; & f''(0) &= 0; \\ f'''(x) &= -\cos x; & f'''(0) &= -1; \\ f^{IV}(x) &= \sin x; & f^{IV}(0) &= 0; \end{aligned}$$

Відзначимо, що значення похідних повторюється та утворюють послідовність

$$1, \quad 0, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad -1, \dots$$

Усі парні похідні дорівнюють нулю. Отже, за формулою (15.15) маємо

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

при $x \in (-\infty; \infty)$. (15.17)

Збіжність отриманого ряду до заданої функції на всій числовій осі встановлюється за ознакою Даламбера. Пропонуємо читачеві виконати цю перевірку самостійно.

Аналогічно знаходиться розклад функції $y = \cos x$ у ряд Маклорена. Запишемо лише остаточний результат:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

при $x \in (-\infty; \infty)$. (15.18)

3. Біноміальний ряд $f(x) = (1 + x)^m$.

Обчислимо значення функції в точці $x = 0$, знайдемо похідні та обчислимо їхні значення в цієї ж точці:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1; \\ f'(x) &= m(1 + x)^{m-1}; \\ f'(0) &= m; \end{aligned}$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2};$$

$$f''(0) = m(m-1);$$

.....

$$f^{(n)}(x) = m(m-1) \dots (m-n+1)(1+x)^{m-n};$$

$$f^{(n)}(0) = m(m-1) \dots (m-n+1).$$

За формулою (15.15) розклад біноміальної функції в ряд Маклорена набуває вигляду:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \\ + \dots \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

Знайдемо область збіжності отриманого ряду за ознакою Даламбера:

$$u_n = \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} x^n; \\ u_{n+1} = \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)(m-n)}{(n+1)!} x^{n+1}; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)(m-n)x^{n+1}}{n!(n+1)} \cdot \frac{n!}{m(m-1) \dots (m-n+1)x^n} \right| = \\ = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m-n}{n+1} \right| = |x| < 1.$$

За ознакою Даламбера ряд збігається при $|x| < 1$ і розбігається при $|x| > 1$. Остаточно маємо розклад біноміальної функції в ряд Маклорена:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \\ + \dots \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} x^n + \dots \\ \text{при } x \in (-1; 1). \quad (15.19)$$

Розглянемо найпоширеніші біноміальні ряди, які ми будемо застосовувати в розв'язанні наступних задач. Нас будуть цікавити ситуації, які відповідають значенням $m = -1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$. Безпосередня підстановка у формулу (15.19) приводить нас до таких розкладів (інтервали збіжності отриманих рядів пропонуємо перевірити самостійно):

$$m = -1:$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

при $x \in (-1; 1)$; (15.20)

$$m = -\frac{1}{2}:$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots$$

$$\dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}x^n + \dots$$

при $x \in (-1; 1]$; (15.21)

$$m = \frac{1}{2}:$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2n}x^n + \dots$$

при $x \in [-1; 1)$. (15.22)

4. Логарифмічна функція $y = \ln(1+x)$.

Використовувати для розкладу логарифмічної функції вже знайому нам процедуру - диференціювання, обчислення знайдених похідних у точці $x = 0$, встановлення закономірності - виявляється недоречно. Набагато зручніше нам буде отримати розклад цієї функції в ряд Маклорена за допомогою розкладу біноміальної функції (15.20). Якщо про інтегруємо вираз $\frac{1}{1+x}$, отримаємо

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^x = \ln(1+x).$$

За властивістю (15.7) степеневий ряд можна інтегрувати:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dx}{1+x} &= \int_0^x dx - \int_0^x x dx + \int_0^x x^2 dx - \int_0^x x^3 dx + \dots \\ &\quad + \int_0^x (-1)^n x^n dx + \dots = \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \end{aligned}$$

Остаточно маємо

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

при $x \in (-1; 1]$ (15.23)

5. *Обернені тригонометричні функції*

$$y = \operatorname{arctg} x \quad i \quad y = \arcsin x.$$

Для отримання відповідних формул знов скористаємося властивістю (15.7) степеневих рядів та біноміальними розкладами (15.20) і (15.21).

Пригадаємо, що

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^x = \operatorname{arctg} x.$$

У біноміальному розкладі (15.20) виконаємо заміну $x \rightarrow x^2$:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$$

і проінтегруємо

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} &= \int_0^x (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots) dx = \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots\end{aligned}$$

Остаточно маємо

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

при $x \in [-1; 1]$ (15.24)

Розклад арксинуса отримаємо, якщо в біноміальному розкладі (15.21) виконати заміну $x \rightarrow (-x^2)$ і проінтегрувати:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots; \\ \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x \Big|_0^x = \arcsin x; \\ \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots \right) dx = \\ &= x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots\end{aligned}$$

Остаточно маємо

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots \quad \text{при } x \in [-1; 1]$$

(15.25)

Формули (15.16) – (15.25) можна застосовувати для розкладу складніших функцій. Проілюструємо це на прикладах.

Приклад 15.8. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x) = e^{2x^3}$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (15.16), виконавши заміну $x \rightarrow 2x^3$:

$$e^{2x^3} = 1 + 2x^3 + \frac{(2x^3)^2}{2!} + \dots + \frac{2^n \cdot x^{3n}}{n!} + \dots$$

Знайдемо область збіжності отриманого ряду, скориставшись ознакою Даламбера:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2^n \cdot x^{3n}}{n!}; \quad u_{n+1} = \frac{2^{n+1} \cdot x^{3(n+1)}}{(n+1)!} = \frac{2^n \cdot 2 \cdot x^{3n} \cdot x^3}{n! \cdot (n+1)}; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n \cdot 2 \cdot x^{3n} \cdot x^3}{n! \cdot (n+1)} \cdot \frac{n!}{2^n \cdot x^{3n}} \right| = 2|x^3| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = \\ &= 2|x^3| \cdot 0; \quad |x| \cdot 0 < 1; \quad |x| < \infty; \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Приклад 15.9. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x) = x \operatorname{arctg} 5x$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (15.16), виконавши заміну $x \rightarrow 5x$ і помноживши кожний елемент ряду на x :

$$\begin{aligned} x \operatorname{arctg} 5x &= \\ x \left(6x - \frac{(6x)^3}{3} + \frac{(6x)^5}{5} - \frac{(6x)^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(6x)^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right) \\ &= 6x^2 - \frac{6^3 x^4}{3} + \frac{6^5 x^6}{5} - \frac{6^7 x^8}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{6^{2n-1} x^{2n}}{2n-1} + \dots \end{aligned}$$

Знайдемо область збіжності отриманого ряду, скориставшись ознакою Даламбера:

$$u_n = \frac{6^{2n-1} x^{2n}}{2n-1}; \quad u_{n+1} = \frac{6^{2(n+1)-1} x^{2(n+1)}}{2(n+1)-1} = \frac{6^{2n-1} \cdot 6^2 \cdot x^{2n} \cdot x^2}{2n+1};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{6^{2n-1} \cdot 6^2 \cdot x^{2n} \cdot x^2}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{6^{2n-1} x^{2n}} \right| =$$

$$= 6^2 \cdot x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 6^2 x^2 < 1;$$

$$6|x| < 1; \quad -\frac{1}{6} < x < \frac{1}{6}.$$

Перевіримо збіжність отриманого ряду на кінцях інтервала:

$$x = -\frac{1}{6}: \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{6^{2n-1} \left(-\frac{1}{6}\right)^{2n}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{6(2n-1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6(2n-1)} = 0;$$

необхідна умова виконана;

за ознакою порівняння з розбіжним гармонічним рядом $v_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6(2n-1)}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{12}$$

абсолютної збіжності немає

\Rightarrow ряд збігається умовно.

$$x = \frac{1}{6}: \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{6^{2n-1} \left(\frac{1}{6}\right)^{2n}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{6(2n-1)}$$

умовна збіжність цього ряду нами вже встановлена.

Отже, область збіжності отриманого ряду $x \in \left[-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right]$.

15.8 Деякі застосування рядів Тейлора та Маклорена

15.8.1 Наближене обчислення функцій

У вік тотального застосування калькуляторів, які є обов'язковими в будь-якому сучасному електронному пристрої, читачеві не зайвим буде з'ясувати, як саме обчислюється значення трансцендентних функцій.

Використовуючи вже отримані розклади основних функцій у степеневі ряди завжди виникає питання про кількість елементів, які необхідно взяти для обчислення із заданою точністю. Це питання можна розв'язати, спираючись на теорему 15.4 про оцінку остаточного члену ряду, або виконуючи оцінку безпосередньо самого залишку ряду. У випадку знакозмінного ряду це можна зробити за допомогою теореми Лейбниці, у випадку ряду з додатними членами – шляхом підбору іншого ряду, члени якого більше залишку ряду, що досліджується.

Приклад 15.10. Обчислити значення \sqrt{e} із точністю $\alpha = 0,00001$.

Розв'язання. Скористаємося розкладом (15.16), враховуючи, що $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

За умовою теореми 15.4 маємо

$$R_n(x) < e^M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

При $M = 1$ отримаємо

$$R_n(x) < e \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < 3 \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Для зручності обчислень ми навмисно збільшили праву частину ($3 > e$). Підрахуємо кількість членів ряду для обчислення із заданою точністю:

$$\frac{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!} < 0,00001.$$

Ця умова виконується при $n = 6$:

$$\frac{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6+1}}{(6+1)!} = \frac{1}{215040} \approx 0,000005 < 0,00001.$$

Отже обчислимо всі доданки із тією самою точністю:

$$\begin{aligned} \sqrt{e} &\approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6}{6!} \approx \\ &\approx 1 + 0,5 + 0,125 + 0,02033 + 0,00260 + 0,00026 + 0,00002 \approx \\ &\approx 1,64821. \end{aligned}$$

Приклад 15.10. Обчислити значення $\cos 1$ із точністю $\alpha = 0,00001$.

Розв'язання. Скористаємося розкладом (15.18):

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

З того, що цей розклад є знакозмінним степеневим рядом, оцінку можна проводити за залишком ряду, а саме

$$\begin{aligned} \cos x &\approx 1, & |R_0(x)| &< \frac{x^2}{2!}, \\ \cos x &\approx 1 - \frac{x^2}{2!}, & |R_2(x)| &< \frac{x^4}{24}, \end{aligned}$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}, \quad |R_4(x)| < \frac{x^6}{720},$$

.

Виконаємо цю перевірку, ураховуючи, що $x = 1$ (зауважимо, що тут кути вимірюються в радіанах):

$$|R_6(1)| < \frac{1}{40320} \approx 0,00002;$$

$$|R_8(1)| < \frac{1}{2257920} \approx 0,0000004.$$

Бачимо, щоб обчислити значення функції із заданою точністю, необхідно взяти чотири елементи ряду:

$$\begin{aligned} \cos 1 &\approx 1 - \frac{1^2}{2!} + \frac{1^4}{4!} - \frac{1^6}{6!} + \frac{1^8}{8!} \approx \\ &\approx 1 - 0,5 + 0,04167 - 0,00139 + 0,00002 \approx 0,54030. \end{aligned}$$

Приклад 15.11. Обчислити значення $\ln 2$ із точністю $\alpha = 0,00001$.

Розв'язання. Коефіцієнти ряду (15.23)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

спадають надзвичайно повільно. Так, за теоремою Лейбница про оцінку знакозмінного ряду, для обчислення $\ln 2$ із заданою точністю необхідно взяти не менше ніж 100000 членів ряду, що, зрозуміло, робить обчислення майже неможливим.

Для «прискорення» збіжності ряду запишемо також ряд $\ln(1-x)$ (який отримаємо шляхом заміни $x \rightarrow (-x)$). Знайдемо різницю

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots;$$

$$\begin{aligned} \ln(1+x) - \ln(1-x) &= \ln \frac{1+x}{1-x} = \\ &= 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right) \quad \text{при } x \in (-1; 1). \end{aligned}$$

За отриманою формулою можна обчислити значення логарифму будь-яких додатних аргументів (не обмежуючись значенням $\ln 2$ ($x+1=2$; $x=1$)). Дійсно, при зміні x в області збіжності ряду $(-1; 1)$, неперервна функція $\frac{1+x}{1-x}$ приймає значення $(0; \infty)$.

Обчислимо $\ln 2$. Якщо $\frac{1+x}{1-x} = 2$, то $x = \frac{1}{3}$. n -часткова сума набуває вигляду:

$$\ln 2 \approx 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{3^{2n-1}} + \dots \right).$$

Оцінімо похибку:

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{1}{3^{2n+3}} + \dots \right) < \\ < \frac{2}{(2n+1)3^{2n+1}} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots \right). \end{aligned}$$

У дужках ми отримали спадну геометричну прогресію ($b_1 = 1$, $q = \frac{1}{9}$), сума якої дорівнює $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9}{8}$. Підставимо отриману величину

$$\begin{aligned} \frac{2}{(2n+1)3^{2n+1}} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) &= \frac{2 \cdot 9}{(2n+1)3^{2n+1} \cdot 8} = \\ &= \frac{1}{(2n+1)3^{2n-1} \cdot 4}. \end{aligned}$$

Знайдемо n , при якому похибка не перевищує 0,00001. З умови

$$\frac{1}{(2n+1)3^{2n-1} \cdot 4} < 10^{-5}$$

випливає

$$(2n+1)3^{2n-1} \cdot 4 > 10^5.$$

Спробуємо визначити його:

$$n = 4: \quad (2 \cdot 4 + 1)3^{2 \cdot 4 - 1} \cdot 4 = 78732 < 10^5;$$

$$n = 5: \quad (2 \cdot 5 + 1)3^{2 \cdot 5 - 1} \cdot 4 = 866052 > 10^5.$$

Отже, умова виконується при $n = 5$. Остаточно маємо

$$\begin{aligned} \ln 2 &\approx 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3^9} \right) \approx \\ &\approx 2(0,33333 + 0,01235 + 0,00082 + 0,00007 + 0,00001); \\ \ln 2 &\approx 0,69316. \end{aligned}$$

Прийом, який ми тут застосували, дав нам змогу виконати наближене обчислення, взявши лише п'ять доданків замість 100000!

15.8.2 Інтегрування функцій

Нехай необхідно знайти інтеграл

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx.$$

якщо відомий розклад підінтегральної функції $f(x)$ у степеневий ряд. Це можливо, оскільки за властивістю (15.7) степеневі ряди можна інтегрувати в області збіжності. Виникає питання: а навіщо? Пригадаємо, що під час вивчення теми «Інтегрування функції однієї змінної» ми зауважили, що

аналітичний вираз для первісної функції можна визначити не завжди. У випадках, коли це неможливо, застосовують численні методи.

Тобто, якщо інтеграл $\int_a^x f(x)dx$ в елементарних функціях не може бути виражений, то неелементарна функція $F(x)$ може бути представлена як нескінченна сума найпростіших елементарних функцій - степеневих.

Зауважимо, що оцінку похибки, яку отримаємо під час інтегрування, ми будемо проводити за тими ж самими алгоритмами, які використовували під час наближеного обчислення.

Приклад 15.12. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^{0,5} \frac{1 - \cos x}{x} dx$$

із точністю $\alpha = 0,001$.

Розв'язання. Знайти первісну для заданої функції не представляється можливим, тому скористаємося розкладом функції $\cos x$ (15.17) у ряд Маклорена:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x} &= \frac{1}{x} (1 - \cos x) = \\ &= \frac{1}{x} \left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) \right) = \\ &= \frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{6!} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} + \dots; \end{aligned}$$

Підставимо отриманий вираз у визначений інтеграл:

$$\int_0^{0,5} \frac{1 - \cos x}{x} dx = \int_0^{0,5} \left(\frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{6!} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} + \dots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2 \cdot 2!} - \frac{x^4}{4 \cdot 4!} + \frac{x^6}{6 \cdot 6!} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n) \cdot (2n)!} \right) \Bigg|_0^{0,5} =$$

Обчислимо інтеграл із заданою точністю, для цього виконаємо оцінку величину залишку ряду:

$$I = \frac{x^2}{2 \cdot 2!} \Bigg|_0^{0,5} \approx 0,063; \quad |R_2(x)| < \left| \frac{x^4}{4 \cdot 4!} \right| \approx 0,0007;$$

$$I = \left(\frac{x^2}{2 \cdot 2!} - \frac{x^4}{4 \cdot 4!} \right) \Bigg|_0^{0,5} = 0,062; \quad |R_4(x)| < \left| \frac{x^6}{6 \cdot 6!} \right| \approx 0,000004.$$

Отже, обчисливши лише два члени ряду, ми отримали значення визначеного інтегралу із заданою точністю.

Приклад 15.13. Обчислити інтеграл Лапласа

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Розв'язання. Для вивчення теорії ймовірностей дуже важливим є інтеграл ймовірностей (або функція Лапласа), який обчислити аналітично неможливо. Тому для його обчислення застосовують розклад експоненти (15.16) в ряд Маклорена, виконавши заміну

$$x \rightarrow -\frac{x^2}{2};$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!} + \dots$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 5 \cdot 2!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{2n-1}}{2^{n-1} (2n-1)(n-1)!} + \dots \right)$$

Отриманий ряд збігається на всій числовій осі. Обчислювати значення функції дуже зручно, тому що ряд

швидко збігається. На основі отриманої формули складені таблиці, якими користуються під час вивчення теорії ймовірностей.

15.8.3 Інтегрування диференціальних рівнянь

Якщо розв'язання диференціальних рівнянь у елементарних функціях не можливо, або існуючий спосіб надзвичайно громіздкий, застосовують розклад функції в степеневі ряди.

Загалом виокремимо два головних способи розв'язання диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів.

1. *Спосіб послідовного диференціювання*

Для розв'язання задачі Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

використовують ряд Тейлора

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

де $y_0 = y(x_0)$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$,

а інші похідні $y^{(n)}(x_0)$ ($n = 2, 3, \dots$) знаходяться шляхом послідовного диференціювання диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ та підстановки початкових умов у вирази для цих похідних.

Спосіб послідовного диференціювання можна застосовувати для розв'язання диференціальних рівнянь будь-яких типів.

Приклад 15.14. Знайти перші п'ять ненульових членів розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння $y'' = xy' - y + e^x$, яке задовольняє умові $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Розв'язання. Розклад у степеневий ряд будемо виконувати в околі точки $x_0 = 0$, тобто будемо застосовувати ряд Маклорена:

$$y(x) \approx y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Виконаємо послідовне диференціювання:

$$y(0) = 1;$$

$$y'(0) = 0;$$

$$y''(0) = (xy' - y + e^x) \Big|_{x=0} = -1 + 1 = 0;$$

$$\begin{aligned} y'''(0) &= (xy' - y + e^x)' \Big|_{x=0} = \\ &= (y' + xy'' - y' + e^x) \Big|_{x=0} = 1; \end{aligned}$$

$$y^{IV}(0) = (xy'' + e^x)' \Big|_{x=0} = (y'' + xy''' + e^x) \Big|_{x=0} = 1;$$

$$\begin{aligned} y^V(0) &= (y'' + xy''' + e^x)' \Big|_{x=0} = \\ &= (y''' + y''' + xy^{IV} + e^x) \Big|_{x=0} = 3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{VI}(0) &= (2y''' + xy^{IV} + e^x)' \Big|_{x=0} = \\ &= (2y^{IV} + y^{IV} + xy^V + e^x) \Big|_{x=0} = 4. \end{aligned}$$

Підставимо отримані значення похідних у ряд Маклорена. Остаточного маємо:

$$y(x) \approx 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{180}x^6.$$

2. Спосіб невизначених коефіцієнтів

Цей метод зазвичай застосовують під час розв'язання лінійних диференціальних рівнянь.

Отже, нехай дано рівняння

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$$

з початковими умовами $y_0 = y(x_0)$, $y'_0 = y'(x_0)$.

Якщо коефіцієнти $p_1(x), p_2(x)$ і права частина $f(x)$ можуть бути представлені степеневим рядом за степенями $(x - x_0)$, який збігається в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$, то шуканий розв'язок може бути представлений степеневим рядом

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

з невизначеними коефіцієнтами. За допомогою початкових умов знаходимо перші два коефіцієнти розкладу, інші коефіцієнти знаходимо двократним (який порядок рівняння) диференціюванням степеневого ряду й підстановкою виразу для них в початкове рівняння та заміною $p_1(x), p_2(x)$ і $f(x)$ їх розкладами в степеневі ряди. У наслідок цього отримаємо тотожність, з якої методом невизначених коефіцієнтів знайдемо невідомі коефіцієнти розкладу.

Ряд, який будується за цим алгоритмом, і є розв'язком диференціального рівняння.

Приклад 15.15. Знайти розв'язок диференціального рівняння $y'' + xy' + y = x \cos x$, який задовольняє початковим умовам $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, методом невизначених коефіцієнтів.

Розв'язання. Запишемо розклад $p_1(x), p_2(x)$ і $f(x)$ в степеневі ряди в околі точки $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x; \\ p_2(x) &= 1; \end{aligned}$$

$$f(x) = x \cos x = x \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \right).$$

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Знайдемо похідні

$$\begin{aligned} y' &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots \\ y'' &= 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots \end{aligned}$$

і за початковими умовами знайдемо коефіцієнти a_0, a_1 :

$$\begin{aligned} y(0) &= a_0 = 1; \\ y'(0) &= a_1 = 0. \end{aligned}$$

Підставимо отримані ряди у диференціальне рівняння:

$$\begin{aligned} &(2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots) + \\ &+ x(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots) + \\ &+ (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots) = \\ &= x \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right). \end{aligned}$$

Методом невизначених коефіцієнтів знайдемо коефіцієнти розкладу:

$$\begin{aligned} x^0: \quad &2a_2 + a_0 = 0; \quad \Rightarrow \quad a_2 = -\frac{1}{2}; \\ x^1: \quad &6a_3 + 2a_1 = 1; \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{6}; \\ x^2: \quad &12a_4 + 3a_2 = 0; \quad \Rightarrow \quad a_4 = \frac{1}{8}; \\ x^3: \quad &20a_5 + 4a_3 = -\frac{1}{2}; \quad \Rightarrow \quad a_5 = -\frac{7}{120}; \\ x^4: \quad &30a_6 + 5a_4 = 0; \quad \Rightarrow \quad a_6 = -\frac{1}{48}; \end{aligned}$$

Остаточно маємо розв'язок диференціального рівняння:

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{120}x^5 - \frac{1}{48}x^6 + \dots$$

Контрольні питання

1. Дайте визначення функціонального ряду.
2. Що таке точка збіжності, область збіжності?
3. Який ряд називається правильно збіжним?
4. Назвіть властивості правильно збіжних рядів.
5. Дайте визначення степеневому ряду.
6. Сформулюйте та доведіть теорему Абеля.
7. Які типи областей збіжності степеневому ряду ви знаєте?
8. Дайте визначення радіуса та інтервалу збіжності.
9. Сформулюйте властивості степеневих рядів.
Порівняйте їх із властивостями правильно збіжних рядів.
10. За якої умови функцію можна розкласти в степеневі ряди.
11. Дайте визначення рядам Тейлора та Макларена.
12. За якої умови степеневий ряд збігається до заданої функції.
13. Опишіть алгоритм розкладання функцій у ряди Тейлора та Макларена.
14. Запишіть розклад основних елементарних функцій у ряд Макларена.
15. Які застосування степеневих рядів ви знаєте? Наведіть приклади.

Розділ 16 РЯДИ ФУР'Є

16.1 Гармонічні коливання

З курсу фізики добре відоме, що *просте гармонічне коливання* (проста гармоніка) може бути описане функцією

$$s = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

де s - відхилення від положення рівноваги, A - амплітуда коливань, t - час, ω - кругова частота, φ_0 - початкова фаза.

Будь яке гармонічне коливання – періодичний процес з періодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Визначення 16.1. Коливання, що утворюються додаванням декількох простих гармонічних коливань називаються *складними гармонічними коливаннями*.

Розглянемо випадок накладання двох простих гармонік:

$$s = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

1. Нехай кругові частоти цих коливань співпадають: $\omega_1 = \omega_2$. В результаті отримаємо періодичне коливання з тією ж частотою та періодом, зміниться лише амплітуда.

2. Нехай частоти коливань – різні: $\omega_1 \neq \omega_2$. Їх періоди відповідно дорівнюють $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}, T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$. В результаті ми отримаємо періодичне коливання лише у випадку, якщо існує таке число T , яке задовольняє умові

$$T = r_1 T_1 \quad \text{і} \quad T = r_2 T_2,$$

де r_1 і r_2 - цілі числа. Звідси прямує, що відношення частот повинно дорівнювати відношенню цих чисел

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

В такому випадку складне коливання

$$s = A_1 \sin(r_1 \omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(r_2 \omega t + \varphi_2)$$

буде періодичним з періодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Зауважимо, що графік отриманого складного коливання суттєво відрізняється від графіку простої гармоніки.

При дослідженнях різних варіантів накладання простих гармонік, які мали різні амплітуди, початкові фази, різні значення r_n і n

$$y = A_1 \sin(r_1 \omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(r_2 \omega t + \varphi_2) + \dots \\ \dots + A_n \sin(r_n \omega t + \varphi_n)$$

було встановлено, що вони можуть бути зведені до будь-яких періодичних функцій. Отже, додавання простих гармонічних коливань можуть відтворити будь-які періодичні процеси, які не схожі на гармонічні. Але це можливо лише у випадку додавання нескінченної суми простих гармонік, тобто функціональних рядів. У випадку додавання кінцевої суми гармонік відтворити будь-яку періодичну функцію зазвичай не можливо.

16.2 Тригонометричні ряди

Визначення 16.2. *Тригонометричним рядом* називається функціональний ряд

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + \\ \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots,$$

членами якого є синуси та косинуси від цілих кратних значень аргументу.

Тригонометричний ряд можна записати у вигляді

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (16.1)$$

де a_n, b_n - коефіцієнти ряду.

Зауваження. Тригонометричний ряд (16.1) можна записати й у вигляді простих гармонік, якщо виконати елементарні перетворення. Об'єднавши доданки з однаковою частотою

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

та позначивши

$$a_n = A_n \sin \varphi_n, \quad b_n = A_n \cos \varphi_n,$$

Отримаємо

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = A_n \sin(nx + \varphi_n).$$

Тут $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ і $\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$.

Остаточно ряд (16.1) можна переписати у вигляді

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n), \quad (16.2)$$

Для знаходження коефіцієнтів a_n, b_n ряду (16.1), обчислимо допоміжні співвідношення. При виводі цих формул необхідно пам'ятати, що всі тригонометричні функції, з якими будемо працювати, мають цілочислений аргумент.

Отже, в подальших міркуваннях ми будемо посилалися на такі співвідношення:

$$\begin{aligned} \text{I. } \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx &= -\frac{1}{k} \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= -\frac{1}{k} (\cos k\pi - \cos k(-\pi)) = -\frac{1}{k} (\cos k\pi - \cos k\pi) = 0; \end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx = 0 \quad (\text{при будь-якому значенні } k). \quad (16.3)$$

$$\begin{aligned} \text{II. } \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx &= \frac{1}{k} \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= -\frac{1}{k} (\sin k\pi - \sin k(-\pi)) = -\frac{1}{k} (0 - 0) = 0; \end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = 0 \quad (\text{при } k \neq 0) \quad (16.4)$$

У випадку $k = 0$ маємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi - (-\pi) = 2\pi.$$

$$\begin{aligned} \text{III. } \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos px \, dx &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(k+p)x + \sin(k-p)x) \, dx = \\ &= -\frac{1}{2(k+p)} \cos(k+p)x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2(k-p)} \cos(k-p)x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0; \end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos px \, dx = 0 \quad (\text{при будь-якому значенні } k). \quad (16.5)$$

$$\text{IV. } \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin px \, dx =$$

а) $k = p$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2kx) \, dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2k} \sin 2kx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{2} (\pi - (-\pi)) = \pi; \end{aligned}$$

б) $k \neq p$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin px \, dx &= \frac{1}{2} (\cos(k-p)x - \cos(k+p)x) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{2(k+p)} \sin(k+p)x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2(k-p)} \sin(k-p)x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin px \, dx &= \begin{cases} \pi, & \text{якщо } k = p \\ 0, & \text{якщо } k \neq p \end{cases}. \end{aligned} \quad (16.6)$$

$$\text{V. } \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos px \, dx =$$

а) $k = p$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2kx) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2k} \sin 2kx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2} (\pi - (-\pi)) = \pi; \end{aligned}$$

б) $k \neq p$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos px \, dx &= \frac{1}{2} (\cos(k-p)x + \cos(k+p)x) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{2(k+p)} \sin(k+p)x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(k-p)} \sin(k-p)x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0; \end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos px \, dx = \begin{cases} \pi, & \text{якщо } k = p \\ 0, & \text{якщо } k \neq p \end{cases}. \quad (16.7)$$

16.3 Ряди Фур'є

Нехай $f(x)$ - будь-яка періодична функція, яка задана на інтервалі $(-\pi; \pi)$, щодо якої ми припускаємо, що її можливо розкласти в збіжний тригонометричний ряд (16.1).

За властивістю (15.2) правильно збіжних функціональних рядів, будемо припускати, що ряд (16.1) можна почленно інтегрувати.

Проінтегруємо обидві частини рівності (16.1) на інтервалі $(-\pi; \pi)$, скориставшись отриманими раніше співвідношеннями (16.3) – (16.7).

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx dx ;$$

другий та третій доданки в правій частині за співвідношеннями (16.3), (16.4) дорівнюють нулю, отже,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_0}{2} (\pi - (-\pi)) = a_0 \pi.$$

Звідси маємо

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (16.8)$$

Для знаходження коефіцієнта a_n помножимо обидві частини рівності (16.1) на $\cos nx$ та проінтегруємо на інтервалі $(-\pi; \pi)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \\ &+ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos nx dx, \end{aligned}$$

та скориставшись формулами (16.4), (16.5), (16.7) приходимо до співвідношення

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = a_n \pi.$$

Звідси маємо

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx. \quad (16.9)$$

Аналогічно для знаходження коефіцієнта b_n помножимо обидві частини рівності (16.1) на $\sin nx$ та проінтегруємо на інтервалі $(-\pi; \pi)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx + \\ &+ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin nx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx, \end{aligned}$$

та скориставшись формулами (16.3), (16.5), (16.6) приходимо до співвідношення

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = b_n \pi.$$

Звідси маємо

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad (16.10)$$

Визначення 16.3. Ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

називається **рядом Фур'є** для функції $f(x)$, де a_0, a_n, b_n - **коефіцієнти Фур'є** функції $f(x)$, які визначаються за формулами

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \end{aligned}$$

16.4 Розклад періодичних функцій у ряд Фур'є

Визначення 16.4. Функція $f(x)$ називається **гладкою** в інтервалі (a, b) , якщо вона неперервна разом з своєю першою похідною в кожній точці названого інтервалу.

Визначення 16.5. Функція $f(x)$ називається **кусково-гладкою** в інтервалі (a, b) , якщо інтервал (a, b) можна поділити на скінчену кількість часткових інтервалів, у кожному з яких функція $f(x)$ - гладка.

Графіком гладкої функції є гладка лінія, яка не містить ані кутових точок, ані точок повернення. Графік кусково-гладкої функції складається зі скінченної кількості гладких дуг.

Отже, кусково-гладка функція в інтервалі (a, b) може мати скінчену кількість точок розриву першого роду.

На підставі наведених визначень ми маємо можливість сформулювати умову розкладання функції $f(x)$ у ряд Фур'є.

Теорема 16.1. Якщо функція $f(x)$ кусково-гладка в інтервалі $(-\pi; \pi)$, то її ряд Фур'є збігається до функції $f(x)$ і усіх точках, у яких вона неперервна.

У точках розриву функції $f(x)$ ряд збігається до середнього арифметичного її граничних значень ліворуч та праворуч, тобто до значення

$$\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

де x_0 - точка розриву першого роду.

Приклад 16.1. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x) = 2x - 1$ інтервалі $(-\pi; \pi)$.

Розв'язання. Побудуємо графік функції (рис. 16.1).

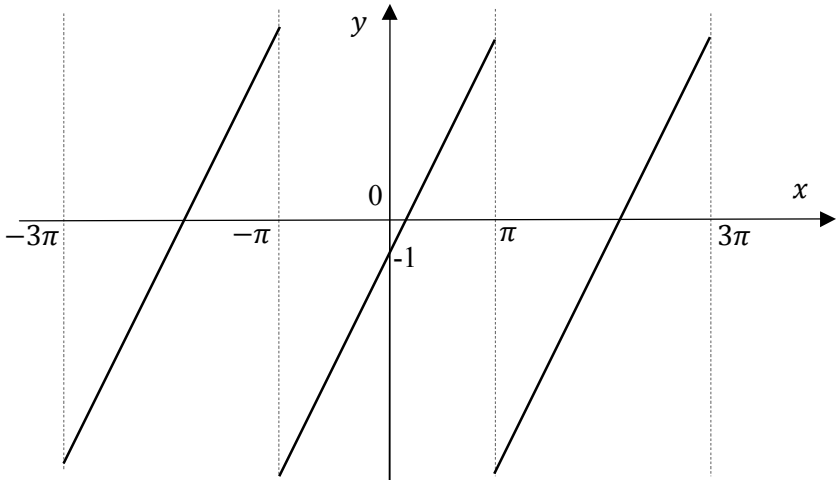


Рисунок 16.1 – Графік функції

Обчислимо значення коефіцієнтів Фур'є за формулами (6.8) – (6.10):

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2x - 1) dx = \frac{1}{\pi} (x^2 - x) \Big|_{-\pi}^{\pi} = -2; \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2x - 1) \cos nx \, dx = \\
 &= \left[\begin{array}{ll} u = 2x - 1 & du = 2dx \\ dv = \cos nx \, dx & v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right] = \frac{1}{\pi n} (2x - 1) \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \\
 &- \frac{2}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi n^2} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0; \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2x - 1) \sin nx \, dx = \\
 &= \left[\begin{array}{ll} u = 2x - 1 & du = 2dx \\ dv = \sin nx \, dx & v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right] = -\frac{1}{\pi n} (2x - 1) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
 &+ \frac{2}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = -\frac{1}{\pi n} (2\pi - 1)(-1)^n + \\
 &+ \frac{1}{\pi n} (-2\pi - 1)(-1)^n + \frac{2}{\pi n^2} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{4}{n} (-1)^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Запишемо розклад заданої функції в ряд Фур'є (16.1):

$$f(x) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} (-1)^{n+1} \sin nx.$$

Приклад 16.2. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x)$, визначену в інтервалі $(-\pi; \pi)$ як

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо графік функції (рис. 16.2).

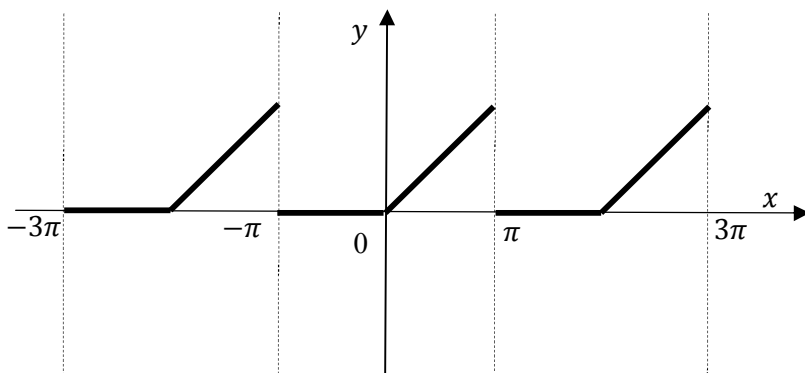


Рисунок 16.2 – Графік функції

З умови, що функція $f(x)$ на інтервалі $-\pi \leq x < 0$ тотожно дорівнює нулю, випливає, що визначені інтеграли на відповідному інтервалі будуть дорівнювати нулю, тому обчислювати коефіцієнти ряду Фур'є будемо лише на інтервалі $0 \leq x \leq \pi$.

За формулами (6.8) – (6.10) маємо:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}; \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \\
 &= \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos nx dx & v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right] = \frac{1}{\pi n} x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \\
 &- \frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{1}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1); \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx =
 \end{aligned}$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin nx \, dx & v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right] = -\frac{1}{\pi n} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \\ + \frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = -\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{\pi n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Запишемо розклад заданої функції н ряд Фур'є (16.1):

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

16.5 Розклад у ряд Фур'є парних та непарних функцій

Нехай функція $f(x)$ - парна. Підінтегральні функції при обчисленні коефіцієнтів a_0, a_n також парні, а підінтегральна функція при обчисленні коефіцієнта b_n - непарна. З властивостей визначеного інтеграла відомо, що величини визначеного інтеграла по симетричному інтервалу від парної функції дорівнює подвійному значенню відповідного інтегралу по половині інтервалу, а від непарної функції – дорівнює нулю.

Отже, парна функція має ряд Фур'є, складений лише із косинусів:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (16.11)$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad (16.12)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx. \quad (16.13)$$

Тому розклад парних функцій називають розкладом за косинусами.

Нехай тепер функція $f(x)$ - непарна. Підінтегральні функції при обчисленні коефіцієнтів a_0, a_n також непарні, а підінтегральна функція при обчисленні коефіцієнта b_n – парна. Із властивостей визначеного інтеграла випливає, що коефіцієнти a_0, a_n дорівнюють нулю, а коефіцієнт b_n - подвоює своє значення на половині періоду.

Отже, непарна функція має ряд Фур'є, складений лише із синусів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (16.14)$$

де

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad (16.15)$$

Тому розклад непарних функцій називають розкладом за синусами.

Приклад 16.3. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x) = 3x - 2$, визначену в інтервалі $(0; \pi)$, довизначивши її:

- а) парним чином;
- б) непарним чином.

Розв'язання. Побудуємо графік функції (рис. 16.3).

а) Довизначимо її парним чином. Графік парної функції симетричний відносно осі ординат (рис. 16.4). Коефіцієнти Фур'є обчислимо за формулами (16.12), (16.13):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (3x - 2) \, dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{3x^2}{2} - 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{3\pi^2}{2} - 2\pi \right) = 3\pi - 4; \end{aligned}$$

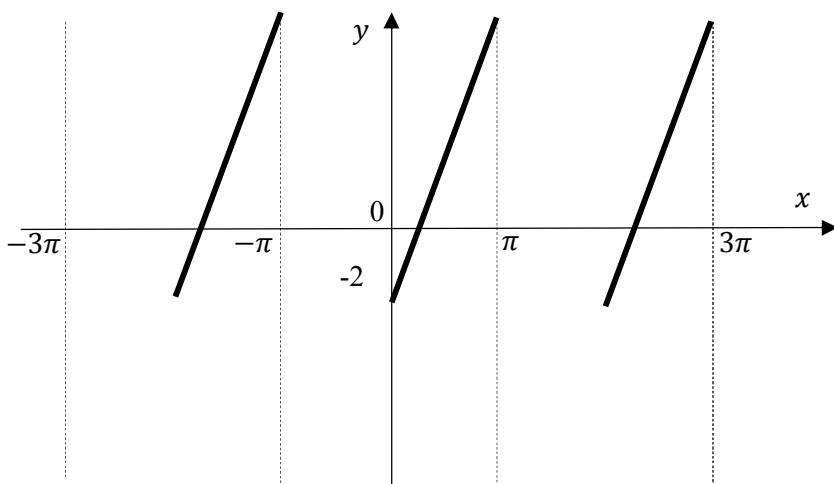


Рисунок 16.3 – Графік функції

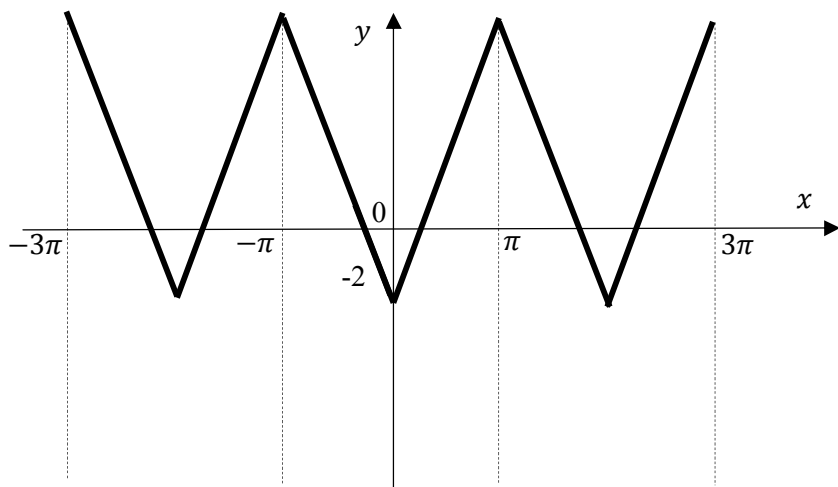


Рисунок 16.4 – Графік парної функції

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (3x - 2) \cos nx \, dx = \\
 &= \left[\begin{array}{ll} u = 3x - 2 & du = 3dx \\ dv = \cos nx \, dx & v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right] = \frac{2}{\pi n} (3x - 2) \sin nx \Big|_0^{\pi} - \\
 &- \frac{6}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{6}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{6}{\pi n^2} ((-1)^n - 1).
 \end{aligned}$$

Остаточно маємо розклад парної функції в ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{3\pi}{2} - 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \cos nx.$$

б) довизначимо функцію непарним чином. Графік парної функції симетричний відносно початку координат (рис. 16.5).

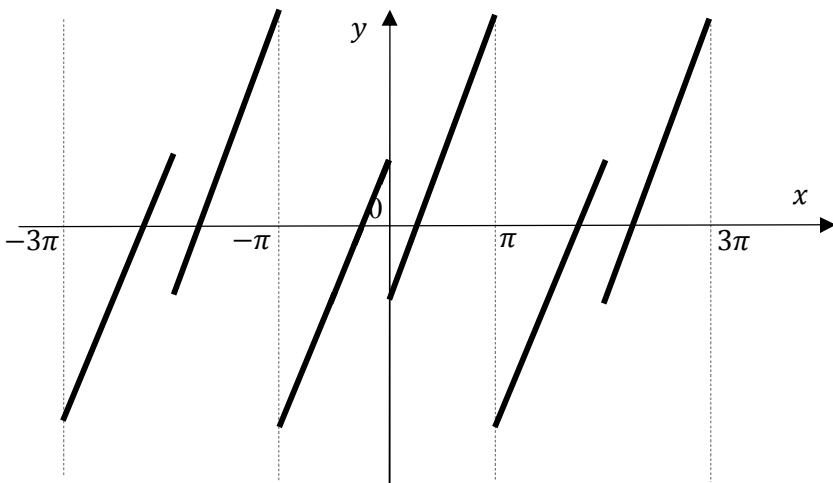


Рисунок 16.5 – Графік непарної функції

Коефіцієнт Фур'є обчислимо за формулою (16.15):

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (3x - 2) \sin nx \, dx = \\
 &= \left[\begin{array}{ll} u = 3x - 2 & du = dx \\ dv = \sin nx \, dx & v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right] = \\
 &= -\frac{2}{\pi n} (3x - 2) \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{6}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = \\
 &= -\frac{2(-1)^n}{\pi n} (3\pi - 2) - \frac{4}{\pi n} + \frac{6}{\pi n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} = \\
 &= \frac{2}{\pi n} ((3\pi - 2)(-1)^{n+1} - 2).
 \end{aligned}$$

Остаточно маємо розклад непарної функції в ряд Фур'є:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} ((3\pi - 2)(-1)^{n+1} - 4) \sin nx.$$

16.6 Розклад у ряд Фур'є функцій з довільним періодом

Нехай функція $f(x)$ - періодична, задана на інтервалі $[-l; l]$, де l - довільне число. У випадку, якщо функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми 16.1, її розклад у ряд Фур'є легко отримати за допомогою заміни змінної

$$\tilde{x} = \frac{\pi x}{l}.$$

За такої заміни, тоді як змінна x пробігає інтервал $[-l; l]$, змінна \tilde{x} - інтервал $[-\pi; \pi]$.

Розклад періодичної функції, заданої на інтервалі $[-l; l]$ у ряд Фур'є, набуває вигляду

$$f(x) = f\left(\frac{l}{\pi} \tilde{x}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\tilde{x} + b_n \sin n\tilde{x}$$

або

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (16.16)$$

де коефіцієнти Фур'є знаходяться за формулами

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} \tilde{x}\right) \cos n\tilde{x} d\tilde{x} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (16.17)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} \tilde{x}\right) \sin n\tilde{x} d\tilde{x} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (16.18)$$

Приклад 16.4. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x) = x + 3$, визначену в інтервалі $[-2; 2]$.

Розв'язання. Побудуємо графік функції (рис. 16.6).

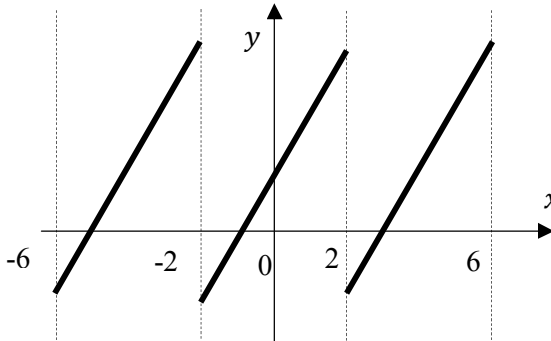


Рисунок 16.6 – Графік функції

Обчислимо коефіцієнти Фур'є за формулами (16.17), (16.18):

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (x+3) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_{-2}^2 = 6;$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (x+3) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= \left[\begin{array}{ll} u = x+3 & du = dx \\ dv = \cos \frac{n\pi x}{2} dx & v = \frac{2}{\pi n} \sin \frac{n\pi x}{2} \end{array} \right] = \\ &= \frac{2}{\pi n} (x+3) \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_{-2}^2 - \frac{2}{\pi n} \int_{-2}^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= \frac{4}{\pi^2 n^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_{-2}^2 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (x+3) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= \left[\begin{array}{ll} u = x+3 & du = dx \\ dv = \sin \frac{n\pi x}{2} dx & v = -\frac{2}{\pi n} \cos \frac{n\pi x}{2} \end{array} \right] = \\ &= -\frac{2}{\pi n} (x+3) \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_{-2}^2 + \frac{2}{\pi n} \int_{-2}^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= -\frac{10(-1)^n}{\pi n} + \frac{2(-1)^n}{\pi n} + \frac{4}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_{-2}^2 = \frac{8(-1)^{n+1}}{\pi n}. \end{aligned}$$

Запишемо розклад заданої функції в ряд Фур'є (16.1):

$$f(x) = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

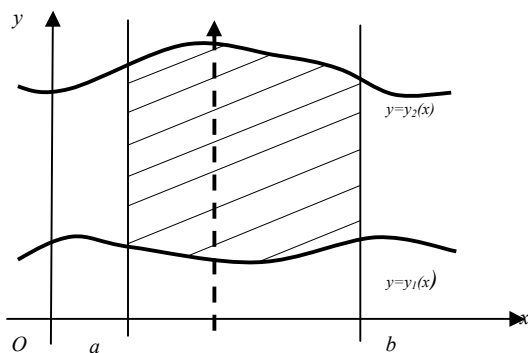
Контрольні питання

1. Опишіть гармонічне коливання.
2. Дайте визначення тригонометричного ряду.
3. Сформулюйте визначення ряду Фур'є, за якими формулами обчислюються коефіцієнти Фур'є.
4. Сформулюйте умови розкладу періодичної функції в ряд Фур'є.
5. Які особливості мають розклади парних та непарних функцій в ряд Фур'є?
6. За допомогою якої заміни змінної можна розкласти в ряд Фур'є функцію, визначену на довільному періоді?

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

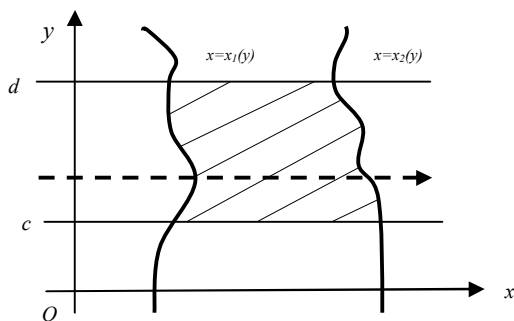
Тема «ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ»

Вертикальна область

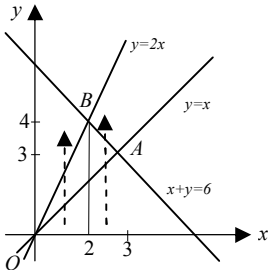
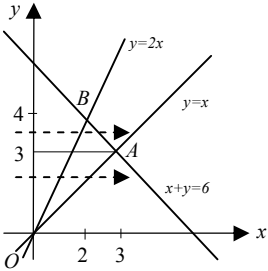
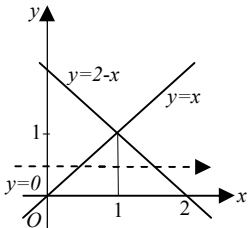


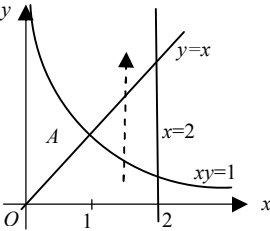
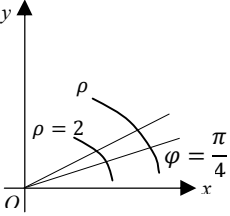
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

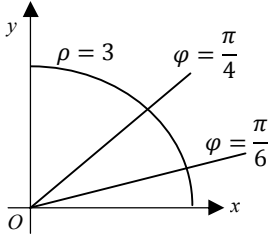
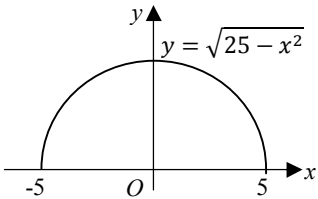
Горизонтальна область

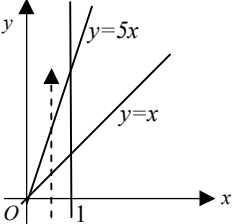
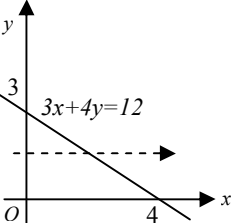


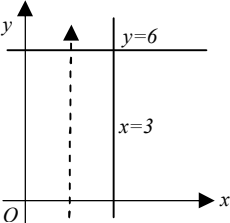
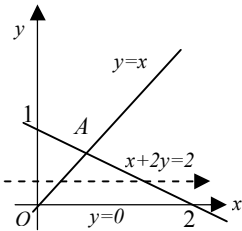
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$$

<p>Розставити межі інтегрування</p> <p>$D: y = x; y = 2x; x + y = 6$</p> <p>$A: \begin{cases} y = x \\ x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow A(3; 3)$</p> <p>$B: \begin{cases} y = 2x \\ x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow B(2; 4)$</p>	
	<p>Розглянемо область як вертикальну:</p> $\iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y) dy + \int_2^3 dx \int_x^{6-x} f(x,y) dy$
	<p>Розглянемо область як горизонтальну</p> $\iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^3 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x,y) dx + \int_3^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^{6-y} f(x,y) dx$
	<p>Змінити порядок інтегрування</p> $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y) dy =$ <p>лінії, що обмежують область:</p> <p>$y = 0; y = x; y = 0; y = 2 - x;$ $0 \leq x \leq 1; 1 \leq x \leq 2$</p> $= \int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x,y) dx$

 <p>$A: \begin{cases} y = x \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1; 1)$</p>	<p>Обчислити подвійний інтеграл</p> $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 \left(-\frac{x^2}{y} \Big _{\frac{1}{x}}^x \right) dx =$ $= \int_1^2 (-x + x^3) dx = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right) \Big _1^2 = 1\frac{3}{4}$
<p>$x = \rho \cos \varphi$ $y = \rho \sin \varphi$ $dx dy = \rho d\rho d\varphi$</p>	<p>Полярна система координат</p> $\iint_D f(x, y) dx dy =$ $= \iint_D f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi$
<p>Полюс розташований поза межами області інтегрування</p> $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$ 	<p>Обчислити подвійний інтеграл по області D, обмеженої лініями $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$; $2 \leq \varphi \leq 4$</p> $\iint_D \rho^2 d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_2^4 \rho^2 d\rho = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\rho^3}{3} \Big _2^4 \right) d\varphi =$ $= \frac{56}{3} \varphi \Big _{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{56}{3} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{14\pi}{9}$
<p>Полюс розташований всередині області інтегрування</p> $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$	<p>Обчислити подвійний інтеграл по області D, обмеженої лініями $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$; $0 \leq \varphi \leq 3$</p> $\iint_D \rho^2 \cos \varphi d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^3 \rho^2 \cos \varphi d\rho =$

	$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\rho^3}{3} \cos \varphi \right) \Big _0^3 d\varphi = 9 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos \varphi d\varphi =$ $= 9 \sin \varphi \Big _{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{9}{2} (\sqrt{2} - 1)$
 <p> $x = \rho \cos \varphi$ $y = \rho \sin \varphi$ $dxdy = \rho d\rho d\varphi$ </p>	<p>Обчислити подвійний інтеграл, попередньо виконавши перехід до полярної системи координат</p> $\int_0^5 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dy =$ $= \int_0^\pi d\varphi \int_0^5 \ln(1+\rho^2) \rho d\rho =$ $= \left[t = 1 + \rho^2 \quad t_{\text{н}} = 1 + 0 = 1 \right] =$ $= \left[dt = 2\rho d\rho \quad t_{\text{б}} = 1 + 5^2 = 26 \right] =$ $= \frac{1}{2} \int_0^\pi d\varphi \int_1^{26} \ln t dt = \left[u = \ln t \quad du = \frac{1}{t} dt \right]$ $= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(t \ln t \Big _1^{26} - \int_1^{26} t \frac{dt}{t} \right) d\varphi =$ $= \frac{1}{2} (26 \ln 26 - 25) \int_0^\pi d\varphi =$ $= \frac{1}{2} (26 \ln 26 - 25) \varphi \Big _0^\pi = \frac{\pi}{2} (26 \ln 26 - 25)$

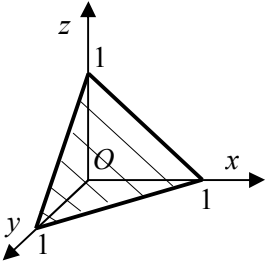
Деякі застосування подвійних інтегралів	
<p>Площа плоскої фігури в декартовій системі координат</p> $S = \iint_D dx dy$ 	<p>Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x$, $y = 5x$, $x = 1$</p> $S = \int_0^1 dx \int_x^{5x} dy = \int_0^1 \left(y \Big _x^{5x} \right) dx =$ $= \int_0^1 4x dx = \frac{4x^2}{2} \Big _0^1 = 2 \text{ (од}^2\text{)}$
<p>Площа плоскої фігури в полярній системі координат</p> $S = \iint_D \rho d\rho d\varphi$	<p>Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$, яка розташована в першому квадранті</p> <p>Перейдемо до полярної системи координат: $(\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)^2 = 2a^2 \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi$ $\rho^4 = \rho^2 \sin 2\varphi \Rightarrow \rho = \sqrt{\sin 2\varphi}$.</p> $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho d\rho =$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \rho^2 \Big _0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi =$ $= -\frac{1}{4} \cos 2\varphi \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4} (-1 - 1) = \frac{1}{2} \text{ (од}^2\text{)}$
<p>Об'єм циліндричного тіла</p> $V = \iint_D f(x, y) dx dy$ 	<p>Обчислити об'єм тіла, яке обмежене циліндром $z = 9 - y^2$, координатними площинами і площиною $3x + 4y = 12$</p> $V = \int_0^3 dy \int_0^{\frac{4y+12}{3}} (9 - y^2) dx =$ $= \int_0^3 \left((9 - y^2) x \Big _0^{\frac{4y+12}{3}} \right) dy =$ $= \frac{1}{3} \int_0^3 (-4y^3 - 12y^2 + 36y + 108) dy =$ $= \frac{1}{3} (-y^4 - 4y^3 + 18y^2 + 108y) \Big _0^3 = 99$

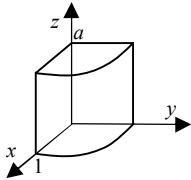
<p>Площа поверхні</p> $S = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$ 	<p>Обчислити площу той частини поверхні $z^2 = 2xy$, яка розташована над прямокутником, що лежить в площині $z = 0$ і обмежена прямими $x = 0, y = 0, x = 3, y = 6$.</p> <p>Обчислимо частинні похідні</p> $z'_x = \frac{y}{\sqrt{2xy}}; \quad z'_y = \frac{x}{\sqrt{2xy}};$ $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \frac{x+y}{\sqrt{2xy}};$ $S = \int_0^3 dx \int_0^6 \frac{x+y}{\sqrt{2xy}} dy = \int_0^3 \left(\sqrt{2xy} + \frac{2y\sqrt{y}}{3\sqrt{2x}} \right) \Big _0^6 dx$ $= \sqrt{12} \int_0^3 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \sqrt{12} \left(\frac{2}{3} x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \right) \Big _0^3$ $= \mathbf{24(од^2)}$
<p>Маса плоскої пластинки змінної щільності</p> $m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy$ 	<p>Обчислити масу пластини, яка займає область D, що обмежена прямими $y = 0, y = x, x + 2y = 2$ та має поверхневу щільність $\gamma(x, y) = xy$.</p> <p>Знайдемо координати точки перетину прямих</p> $A: \begin{cases} y = x \\ y = \frac{x}{2} + 1 \end{cases} \Rightarrow A \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$ $m = \int_0^{\frac{2}{3}} dx \int_x^{\frac{x}{2}+1} xy dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2}{3}} xy^2 \Big _x^{\frac{x}{2}+1} dx =$ $= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2}{3}} \left(x \left(-\frac{x}{2} + 1 \right)^2 - x^3 \right) dx =$ $= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2}{3}} \left(-\frac{3x^3}{4} - x^2 + x \right) dx =$ $= \frac{1}{2} \left(-\frac{3x^4}{16} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big _0^{\frac{2}{3}} = \mathbf{\frac{7}{162}}$
<p>Статичні моменти</p> $M_x = \iint_D y \cdot \gamma(x, y) dx dy$ $M_y = \iint_D x \cdot \gamma(x, y) dx dy$	<p>Знайти статичні моменти пластини, яка займає область D, що обмежена прямими $y = 0, y = x, x + 2y = 2$ та має поверхневу щільність $\gamma(x, y) = xy$.</p> $M_x = \int_0^{\frac{2}{3}} dx \int_x^{\frac{x}{2}+1} xy^2 dy = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{2}{3}} xy^3 \Big _x^{\frac{x}{2}+1} dx$

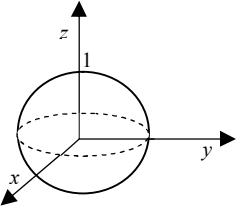
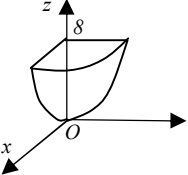
	$= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{2}{3}} \left(x \left(1 - \frac{x}{2} \right)^3 - x^4 \right) dx =$ $= \frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{3x^4}{16} - \frac{9x^5}{40} \right) \Bigg _0^{\frac{2}{3}} = \frac{11}{405};$ $M_y = \int_0^{\frac{2}{3}} dx \int_x^{-\frac{x}{2}+1} x^2 y dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2}{3}} x^2 y^2 \Bigg _x^{-\frac{x}{2}+1} dx$ $= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2}{3}} \left(x^2 \left(-\frac{x}{2} + 1 \right)^2 - x^4 \right) dx =$ $= \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{3x^5}{5} \right) \Bigg _0^{\frac{2}{3}} = \frac{26}{405}$
<p>Центр ваги пластинки</p> $x_0 = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_D x \cdot \gamma(x, y) dx dy}{\iint_D \gamma(x, y) dx dy}$ $y_0 = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_D y \cdot \gamma(x, y) dx dy}{\iint_D \gamma(x, y) dx dy}$	<p>Знайти центр ваги пластини, яка займає область D, що обмежена прямими $y = 0$, $y = x$, $x + 2y = 2$ та має поверхневу щільність $\gamma(x, y) = xy$.</p> <p>Скористаємося результатами обчислень попередніх прикладів:</p> $x_0 = \frac{M_y}{m} = \frac{26}{405} \cdot \frac{162}{7} = \frac{52}{35};$ $y_0 = \frac{M_x}{m} = \frac{11}{405} \cdot \frac{162}{7} = \frac{22}{35}.$
<p>Моменти інерції пластинки</p> $I_x = \iint_D y^2 \cdot \gamma(x, y) dx dy$ $I_y = \iint_D x^2 \cdot \gamma(x, y) dx dy$	<p>Знайти моменти інерції пластини, яка займає область D, що обмежена прямими $y = 0$, $y = x$, $x + 2y = 2$ та має поверхневу щільність $\gamma(x, y) = xy$.</p> $I_x = \int_0^{\frac{2}{3}} dx \int_x^{-\frac{x}{2}+1} xy^3 dy = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{2}{3}} xy^4 \Bigg _x^{-\frac{x}{2}+1} dx$ $= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{2}{3}} \left(1 - 2x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{15x^4}{16} \right) dx =$

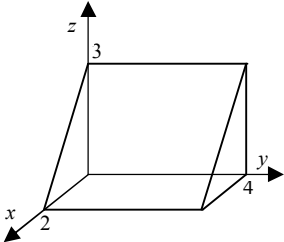
	$= \frac{1}{4} \left(x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{3x^5}{16} \right) \Big _0^{2/3} = \frac{13}{162},$ $I_y = \int_0^{\frac{2}{3}} dx \int_x^{\frac{x}{2}+1} x^3 y dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2}{3}} x^3 y^2 \Big _x^{-\frac{x}{2}+1} dx =$ $= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2}{3}} \left(x^3 - x^4 - \frac{3x^5}{4} \right) dx =$ $= \frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{8} \right) \Big _0^{2/3} = \frac{22}{3645}.$
--	---

Тема «ПОТРІЙНІ ІНТЕГРАЛИ»

$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz$	
	<p>Обчислити потрійний інтеграл, якщо область інтегрування обмежена площиною $x + y + z = 1$ і координатними площинами</p> $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(4x + 3y + z - 2)^4}$ $= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dx dy dz}{(4x + 3y + z - 2)^4} =$ $= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(-\frac{1}{3(4x + 3y + z - 2)^3} \Big _0^{1-x-y} \right) dy =$ $= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(-\frac{1}{3(3x + 2y - 1)^3} + \frac{1}{3(4x + 3y - 2)^3} \right) dy =$ $= \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\left(\frac{1}{4(3x + 2y - 1)^2} - \frac{1}{6(4x + 3y - 2)} \right) \Big _0^{1-x} \right) dx$

	$= \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{1}{12(x+1)^2} - \frac{1}{4(3x-1)^2} + \frac{1}{6(4x-2)^2} \right) dx =$ $= \frac{1}{72} \left(-\frac{2}{x+1} + \frac{2}{3x-1} - \frac{1}{4x-2} \right) \Big _0^1 = \frac{1}{18}$
$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi,$ $z = z$	<p>Обчислення потрібних інтегралів в циліндричній системі координат</p> $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv =$ $\iiint_{\Omega} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz$
<p>для циліндра</p> $\rho \leq R, 0 \leq z \leq h$	$\int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho$
	<p>Обчислити потрібний інтеграл, виконавши перехід до циліндричних координат</p> $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz = \int_0^a dz \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho =$ $= z \Big _0^a \cdot \varphi \Big _0^{\pi/2} \cdot \frac{1}{2} \rho^2 \Big _0^1 = \frac{\pi a}{4}$
$x = \rho \sin \theta \cos \varphi;$ $y = \rho \sin \theta \sin \varphi;$ $z = \rho \cos \theta.$	<p>Обчислення потрібних інтегралів в сферичній системі координат</p> $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv =$ $= \iiint_{\Omega} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta$
<p>для кулі</p>	$\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 d\rho$

<p>для кульового кільця</p>	$\int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 d\rho$
	<p>Обчислити потрібний інтеграл, виконавши перехід до сферичних координат</p> $\begin{aligned} & \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) dz = \\ &= \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \sin^2 \theta \, \rho^2 d\rho = \\ &= \int_0^{\pi} \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^4 d\rho = \\ &= \left(\cos \theta - \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right) \Big _0^{\pi} \cdot \varphi \Big _0^{2\pi} \cdot \frac{1}{5} \rho^5 \Big _0^1 = \frac{8\pi}{15} \end{aligned}$
<p>Деякі застосування потрійних інтегралів</p>	
<p>Об'єм тіла</p>  $V = \iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz$	<p>Обчислити об'єм тіла, обмеженого координатними площинами, площиною $z = 8$ і параболоїдом обертання</p> $z = x^2 + y^2$ $\begin{aligned} V &= \int_0^{2\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{8-x^2}} dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \\ &= \int_0^{2\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{8-x^2}} z \Big _0^{x^2+y^2} dy = \int_0^{2\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{8-x^2}} (x^2 + y^2) dy = \\ &= \int_0^{2\sqrt{2}} \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right) \Big _0^{\sqrt{8-x^2}} dx = \int_0^{2\sqrt{2}} \left(x^2 \sqrt{8-x^2} + \frac{1}{3} \sqrt{(8-x^2)^3} \right) dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\begin{aligned} &x = 2\sqrt{2} \sin t \quad t_H = 0 \\ &\sqrt{8-x^2} = 2\sqrt{2} \cos t \quad t_H = \frac{\pi}{2} \\ &dx = 2\sqrt{2} \cos t \, dt \end{aligned} \right] \\ &= 64 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t \, dt + \frac{64}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt = \end{aligned}$

	$ \begin{aligned} &= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \, dt + \frac{64}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)^2 dt = \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt + \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 4t) dt + \\ &\quad + \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos 2t) dt = \\ &= 16t \Big _0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{3} \sin 4t \Big _0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{16}{3} \sin 2t \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = 8\pi \end{aligned} $
<p>Маса неоднорідної пластини</p> $m = \iiint_{\Omega} \gamma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ 	<p>Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями $3x + 2z = 6$, $x = 0$, $z = 0$, $y = 0$, $y = 4$ при щільності $\gamma(x, y, z) = x + y + z$</p> $ \begin{aligned} m &= \int_0^2 dx \int_0^4 dy \int_0^{3-\frac{3}{2}x} (x + y + z) dz = \\ &= \int_0^2 dx \int_0^4 \left(xz + yz + \frac{1}{2} z^2 \right) \Big _0^{3-\frac{3}{2}x} dy = \\ &= \int_0^2 dx \int_0^4 \left(\frac{9}{2} - \frac{3}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + 3y - \frac{3}{2}xy \right) dy = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{9}{2}y - \frac{3}{2}xy - \frac{3}{8}x^2y + \frac{3}{2}y^2 - \frac{3}{4}xy^2 \right) \Big _0^4 dx = \\ &= \int_0^2 \left(42 - 21x - \frac{3}{2}x^2 \right) dx = \\ &= \left(42x - \frac{21}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big _0^2 = 39\frac{1}{3} \end{aligned} $
<p>Статичні моменти відносно координатних площин xOy, yOz, xOz</p>	<p>Знайти статичні моменти відносно координатних площин тіла, обмеженого поверхнями $3x + 2z = 6$, $x = 0$, $z = 0$, $y = 0$, $y = 4$ при щільності $\gamma(x, y, z) = x + y + z$</p> $ M_{yz} = \int_0^2 dx \int_0^4 dy \int_0^{3-\frac{3}{2}x} x(x + y + z) dz = $

$M_{yz} = \iiint_{\Omega} x \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz$	$= \int_0^2 dx \int_0^4 \left(x^2 z + xyz + \frac{1}{2} xz^2 \right) \Big _0^{3-\frac{3}{2}x} dy =$
$M_{xz} = \iiint_{\Omega} y \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz$	$= \int_0^2 dx \int_0^4 \left(\frac{9}{2} x - \frac{3}{2} x^2 - \frac{3}{8} x^3 + 3xy - \frac{3}{2} x^2 y \right) dy =$
$M_{xy} = \iiint_{\Omega} z \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz$	$= \int_0^2 \left(\frac{9}{2} xy - \frac{3}{2} x^2 y - \frac{3}{8} x^3 y + \frac{3}{2} xy^2 - \frac{3}{4} x^2 y^2 \right) \Big _0^4 dx$
	$= \int_0^2 \left(42x - 18x^2 - \frac{3}{2} x^3 \right) dx = \left(21x^2 - 6x^3 - \frac{3}{8} x^4 \right) \Big _0^2 = 30$
	$M_{xz} = \int_0^2 dx \int_0^4 dy \int_0^{3-\frac{3}{2}x} y(x+y+z) dz =$
	$= \int_0^2 dx \int_0^4 \left(xyz + y^2 z + \frac{1}{2} yz^2 \right) \Big _0^{3-\frac{3}{2}x} dy =$
	$= \int_0^2 dx \int_0^4 \left(\frac{9}{2} y - 3y^2 - \frac{3}{2} xy - \frac{3}{8} x^2 y - \frac{3}{2} xy^2 \right) dy =$
	$= \int_0^2 \left(\frac{9}{4} y^2 + y^3 - \frac{3}{4} xy^2 - \frac{3}{16} x^2 y^2 - \frac{1}{2} xy^3 \right) \Big _0^4 dx =$
	$= \int_0^2 (100 - 44x - 3x^2) dx = (100x - 22x^2 - x^3) \Big _0^2 = 104$
	$M_{xy} = \int_0^2 dx \int_0^4 dy \int_0^{3-\frac{3}{2}x} z(x+y+z) dz =$
	$= \int_0^2 dx \int_0^4 \left(\frac{1}{2} xz^2 + \frac{1}{2} yz^2 + \frac{1}{3} z^3 \right) \Big _0^{3-\frac{3}{2}x} dy =$
	$= \int_0^2 dx \int_0^4 \left(9 - 9x + \frac{9}{4} x^2 + \frac{9}{8} x^3 + \frac{9}{2} y - \frac{9}{2} xy + \right.$
	$\left. + \frac{9}{4} x^2 y \right) dy = \int_0^2 \left(9y - 9xy + \frac{9}{4} x^2 y + \frac{9}{8} x^3 y + \right.$
	$\left. + \frac{9}{4} y^2 - \frac{9}{4} xy^2 + \frac{9}{8} x^2 y^2 \right) \Big _0^4 dx =$

	$= \int_0^2 \left(72 - 72x + 27x^2 + \frac{9}{2}x^3 \right) dx =$ $= \left(72x - 36x^2 + 9x^3 + \frac{9}{8}x^4 \right) \Big _0^2 = \mathbf{90}.$
<p>Координат центра мас</p> $x_0 = \frac{M_{yz}}{m},$ $y_0 = \frac{M_{xz}}{m},$ $z_0 = \frac{M_{xy}}{m}$	<p>Знайти координати центра мас площин тіла, обмеженого поверхнями $3x + 2z = 6, x = 0, z = 0, y = 0, y = 4$ при щільності $\gamma(x, y, z) = x + y + z$</p> $x_0 = \frac{45}{59}; \quad y_0 = \frac{156}{59}; \quad z_0 = \frac{135}{59}$
<p>Моменти інерції відносно координатних площин</p> $I_{xy} = \iiint_{\Omega} z^2 \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz;$ $I_{yz} = \iiint_{\Omega} x^2 \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz;$ $I_{xz} = \iiint_{\Omega} y^2 \cdot \gamma(x, y, z) dx dy dz;$	<p>Знайти моменти інерції відносно координатних площин тіла, обмеженого поверхнями $3x + 2z = 6, x = 0, z = 0, y = 0, y = 4$ при щільності $\gamma(x, y, z) = x + y + z$</p> $I_{xy} = \int_0^2 dx \int_0^4 dy \int_0^{3-\frac{3}{2}x} z^2 (x + y + z) dz =$ $= \int_0^2 dx \int_0^4 \left(\frac{1}{3}xz^3 + \frac{1}{3}yz^3 + \frac{1}{4}z^4 \right) \Big _0^{3-\frac{3}{2}x} dy =$ $= \int_0^2 dx \int_0^4 \left(\frac{81}{4} - \frac{63}{2}x + \frac{135}{8}x^2 - \frac{27}{8}x^3 - \frac{63}{64}x^4 + \right.$ $\left. + 9y - \frac{27}{2}xy + \frac{27}{4}x^2y - \frac{9}{8}x^3y \right) dy =$ $= \int_0^2 \left(\frac{81}{4}y - \frac{63}{2}xy + \frac{135}{8}x^2y - \frac{27}{8}x^3y - \frac{63}{64}x^4y + \right.$ $\left. + \frac{9}{2}y^2 - \frac{27}{4}xy^2 + \frac{27}{8}x^2y^2 - \frac{9}{16}x^3y^2 \right) \Big _0^4 dx =$ $= \int_0^2 \left(153 - 234x + \frac{243}{2}x^2 - \frac{45}{2}x^3 - \frac{63}{16}x^4 \right) dx =$ $= \left(153x - 117x^2 + \frac{81}{2}x^3 - \frac{45}{8}x^4 - \frac{63}{80}x^5 \right) \Big _0^2 =$ $= \frac{\mathbf{234}}{\mathbf{5}}$

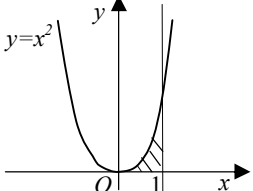
	$ \begin{aligned} I_{yz} &= \int_0^2 dx \int_0^4 dy \int_0^{3-\frac{3}{2}x} x^2(x+y+z) dz = \\ &= \int_0^2 dx \int_0^4 \left(x^3 z + x^3 y z + \frac{1}{2} x^2 z^2 \right) \Bigg _0^{3-\frac{3}{2}x} dy = \\ &= \int_0^2 dx \int_0^4 \left(\frac{9}{2} x^2 - \frac{3}{2} x^3 - \frac{3}{8} x^4 + 3 x^2 y - \frac{3}{2} x^3 y \right) dy = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{9}{2} x^2 y - \frac{3}{2} x^3 y - \frac{3}{8} x^4 y + \frac{3}{2} x^2 y^2 - \frac{3}{4} x^3 y^2 \right) \Bigg _0^4 dx \\ &= \int_0^2 \left(42 x^2 - 18 x^3 - \frac{3}{2} x^4 \right) dx = \\ &= \left(14 x^3 - \frac{9}{2} x^4 - \frac{3}{10} x^5 \right) \Bigg _0^2 = \frac{152}{5}; \\ I_{xz} &= \int_0^2 dx \int_0^4 dy \int_0^{3-\frac{3}{2}x} y^2(x+y+z) dz = \\ &= \int_0^2 dx \int_0^4 \left(x y^2 z + y^3 z + \frac{1}{2} y^2 z^2 \right) \Bigg _0^{3-\frac{3}{2}x} dy = \\ &= \int_0^2 dx \int_0^4 \left(\frac{9}{2} y^2 + 3 y^3 - \frac{3}{2} x y^2 - \frac{3}{8} x^2 y^2 - \frac{3}{2} x y^3 \right) dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{3}{2} y^3 + \frac{3}{4} y^4 - \frac{1}{2} x y^3 - \frac{1}{8} x^2 y^3 - \frac{3}{8} x y^4 \right) \Bigg _0^4 dx \\ &= \int_0^2 (288 - 128 x - 8 x^2) dx = \\ &= \left(288 x - 64 x^2 - \frac{8}{3} x^3 \right) \Bigg _0^2 = \frac{896}{3} \end{aligned} $
та відносно початку координат $I_0 = I_{yz} + I_{xz} + I_{xy}$	$I_0 = \frac{234}{5} + \frac{152}{5} + \frac{896}{3} = 375 \frac{13}{15}$

Тема «Криволінійні інтеграли»

Криволінійні інтеграли першого роду	
<p>Лінія L задана на площині параметричним рівнянням $x = x(t), y = y(t)$.</p> $\int_L f(x, y) dl =$ $\int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$	<p>Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L \sqrt{2y} dl$, де L - перша арка циклоїди $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$</p> $x'_t = a(1 - \cos t), y'_t = a \sin t;$ $dl = a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt =$ $= a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t} dt;$ $\int_L \sqrt{2y} dl = 2a\sqrt{a} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) dt =$ $= 2a\sqrt{a}(t - \sin t) \Big _0^{2\pi} = \mathbf{4\pi a\sqrt{a}}$
<p>Лінія L задана на площині явно $y = y(x)$</p> $\int_L f(x, y) dl =$ $\int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$	<p>Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L \frac{dl}{x-y}$, де L - відрізок прямої $y = \frac{1}{2}x - 2$ між точками $A(0; -2)$ і $B(4; 0)$</p> $y' = \frac{1}{2}; \quad dl = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} dx = \frac{\sqrt{5}}{2} dx$ $\int_L \frac{dl}{x-y} = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_0^4 \frac{dx}{x - \frac{1}{2}x + 2} = \sqrt{5} \int_0^4 \frac{dx}{x + 4} =$ $= \sqrt{5} \ln x + 4 \Big _0^4 = \mathbf{\sqrt{5} \ln 2}$
<p>Лінія L задана на площині явно $x = x(y)$</p> $\int_L f(x, y) dl =$ $\int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy$	<p>Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L y dl$ де L - дуга параболи $2x = y^2$ між точками $A(0; 0)$ і $B(2; 2)$</p> $x = \frac{y^2}{2}; \quad x' = y; \quad dl = \sqrt{1 + y^2} dy$ $\int_L y dl = \int_0^2 y \sqrt{1 + y^2} dy = \frac{1}{3} \sqrt{(1 + y^2)^3} \Big _0^2 =$ $= \mathbf{\frac{5\sqrt{5}}{3}}$

<p>Лінія L задана на площині в полярній системі координат $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$</p> $\int_L f(x, y) dl =$ $\int_{\alpha}^{\beta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2} d\varphi$	<p>Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dl$ де L – частина спіралі Архімеда $\rho = 2\varphi$ при зміні $\varphi = [0; 2\pi]$</p> $\rho' = 2; \quad dl = \sqrt{1 + 2^2} d\varphi = \sqrt{5} d\varphi$ $\int_L \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dl = \sqrt{5} \int_0^{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\rho \sin \varphi}{\rho \cos \varphi} d\varphi =$ $= \sqrt{5} \int_0^{2\pi} \varphi d\varphi = \sqrt{5} \frac{\varphi^2}{2} \Big _0^{2\pi} = 2\sqrt{5}\pi^2$
<p>Лінія L задана у просторі параметричним рівнянням $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$</p> $\int_L f(x, y, z) dl =$ $\int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt$	<p>Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L \frac{z^2 dl}{x^2 + y^2}$, де L - перший виток гвинтової лінії $x = a \cos t, y = a \sin t, z = at$</p> $x'_t = -a \sin t, \quad y'_t = a \cos t, \quad z'_t = a$ $dl = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + a^2} dt = a\sqrt{2} dt$ $\int_L \frac{z^2 dl}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{a^2 t^2 a \sqrt{2} dt}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} =$ $= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{a\sqrt{2} t^3}{3} \Big _0^{2\pi} = \frac{8a\sqrt{2}\pi^3}{3}$
<p>Криволінійні інтеграли другого роду</p>	
<p>Лінія L задана на площині параметричним рівнянням $x = x(t), y = y(t)$.</p> $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy =$ $= \int_{t_1}^{t_2} (P(x(t), y(t))x'_t + Q(x(t), y(t))y'_t) dt$	<p>Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L y dx - x dy$, де L – еліпс $x = a \cos t, y = b \sin t$ який пробігається в додатному напрямку</p> $x'_t = -a \sin t, \quad y'_t = b \cos t$ $\int_L y dx - x dy = \int_0^{2\pi} (-ab \sin^2 t - ab \cos^2 t) dt =$ $= -ab \int_0^{2\pi} dt = -abt \Big _0^{2\pi} = -2\pi ab$
<p>Лінія L задана на площині явно $y = y(x)$</p> $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy =$ $\int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)) dx$	<p>Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L 2xy dx + x^2 dy$ вздовж лінії $y = x^2$ між точками $A(0; 0)$ і $B(1; 1)$</p> $y' = 2x$ $\int_L 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 4x^3 dx = x^4 \Big _0^1 = 1$

<p>Лінія L задана на площині явно $x = x(y)$</p> $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$ $\int_c^d (P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y), y))dy$	<p>Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L x^2 dx + y dy$, де L – частина лінії $y = \ln x$ між точками $A(1; 0)$ і $B(e; 1)$</p> <p>Перепишемо рівняння лінії у вигляді $x = e^y; \quad x' = e^y$</p> $\int_L x^2 dx + y dy = \int_0^1 ((e^y)^2 e^y + y) dy =$ $= \int_0^1 (e^{3y} + y) dy = \left(\frac{1}{3} e^{3y} + \frac{1}{2} y^2 \right) \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{3} e^3 + \frac{1}{6}$
<p>Лінія L задана у просторі параметричним рівнянням $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$</p> $\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy +$ $+ R(x, y, z)dz =$ $= \int_{t_1}^{t_2} (P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'_t +$ $+ Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'_t +$ $+ R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'_t) dt$	<p>Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L yz dx + xz dy + xy dz$, де L – дуга кривої $x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1$</p> $x'_t = 1; y'_t = 2t; z'_t = 3t^2$ $\int_L yz dx + xz dy + xy dz =$ $= \int_0^1 (t^2 \cdot t^3 + t \cdot t^3 \cdot 2t + t \cdot t^2 \cdot 3t^2) dt =$ $= 6 \int_0^1 t^5 dt = t^6 \Big _0^1 = 1$
<p align="center">Зв'язок між криволінійним інтегралом по замкненому контуру та подвійним інтегралом</p>	
<p align="center">Формула Гріна</p> $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy$	<p>Перевірити формулу Гріна, якщо $P(x, y) = x^3 \sqrt{y}, Q(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, $D: 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq x^2$</p> $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}}$ $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}} \right) dy$ $= \int_0^1 \left(\frac{y}{2\sqrt{x}} - x\sqrt[3]{y} \right) \Big _0^{x^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{x^3}}{2} - \sqrt[3]{x^5} \right) dx$ $= \left(\frac{1}{5} \sqrt{x^5} - \frac{3}{8} \sqrt[3]{x^8} \right) \Big _0^1 = \frac{1}{5} - \frac{3}{8} = -\frac{7}{40}$

	$\oint = \int_L + \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3}$ $L_1: y = 0 \quad (0 \leq x \leq 1) \quad y' = 0$ $\int_0^1 (x^3 \sqrt{0} + (\sqrt{x} + \sqrt{0}) \cdot 0) dx = 0$ $L_2: x = 1 \quad (0 \leq y \leq 1) \quad x' = 0$ $\int_0^1 (1^3 \sqrt{y} \cdot 0 + 1 + \sqrt{y}) dy = \left(y + \frac{2}{3} \sqrt{y^3} \right) \Big _0^1 = \frac{5}{3}$ $L_3: y = x^2 \quad (0 \leq x \leq 1) \quad y' = 2x$ $\int_1^0 (x^3 \sqrt{x^2} + (\sqrt{x} + \sqrt{x^2}) \cdot 2x) dx =$ $= \int_1^0 \left(x^{\frac{5}{3}} + 2x^{\frac{3}{2}} + 2x^2 \right) dx =$ $= \left(\frac{3}{8} x^{\frac{8}{3}} + \frac{4}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} x^3 \right) \Big _1^0 = -\frac{221}{120}$ $\oint_L = 0 + \frac{5}{3} - \frac{221}{120} = -\frac{7}{40}$
<p align="center">Інтегрування повних диференціалів. Первісна функція</p> $u(x, y) = \begin{cases} \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C, \\ \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C. \end{cases}$	
<p>Перевірка, чи є функція повним диференціалом</p> $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$	<p>Показати, що даний вираз $(2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy$ є повним диференціалом функції $u(x, y)$, знайти функцію $u(x, y)$</p> $P(x, y) = 2x - 3y^2 + 1; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -6y$ $Q(x, y) = 2 - 6xy; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -6y.$ <p>Отже, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$</p>

	$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C$ $= \int_0^x (2x + 1) dx + \int_0^y (2 - 6xy) dy + C =$ $= (x^2 + x) \Big _0^x + (2y - 3xy^2) \Big _0^y + C =$ $= x^2 + x + 2y - 3xy^2 + C$
Деякі застосування криволінійних інтегралів	
<p>Довжина дуги</p> $L = \int_L dl$	<p>Знайти довжину дуги кривої $x = 2 - \frac{t^4}{4}, y = \frac{t^6}{6}$, яка обмежена точками перетину її з осями координат Ох: $y = 0 \Rightarrow \frac{t^6}{6} = 0; t_1 = 0;$ Оу: $x = 0 \Rightarrow 2 - \frac{t^4}{4} = 0; t_2 = 2$ $x'_t = -t^3; y'_t = t^5$ $dl = \sqrt{(-t^3)^2 + (t^5)^2} dt = t^3 \sqrt{1 + t^4} dt$ $L = \int_0^2 t^3 \sqrt{1 + t^4} dt =$ $= \left[\begin{matrix} u = 1 + t^4 & u_H = 1 \\ du = 4t^3 dt & u_B = 17 \end{matrix} \right] =$ $= \frac{1}{4} \int_1^{17} \sqrt{u} du = \frac{1}{6} u \sqrt{u} \Big _1^{17} = \frac{1}{6} (17\sqrt{17} - 1)$</p>
<p>Площа фігури</p> $S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$	<p>Обчислити площу фігури, обмеженої однією аркою астрои́ди $x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$ $dx = -3a \cos^2 t \sin t dt;$ $dy = 3a \sin^2 t \cos t dt$ $S = \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t) dt$ $= \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3a^2}{16} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt$ $= \frac{3a^2}{16} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big _0^{2\pi} = \frac{3\pi a^2}{8} \text{ (од}^2\text{)}$</p>

<p>Маса дуги кривої</p> $m = \int_L \gamma(x, y) dl$	<p>Обчислити масу дуги кривої $y = \ln x$ ($1 \leq x \leq e$) з поверхневою щільністю</p> $\gamma(x, y) = x^2$ $y' = \frac{1}{x}; \quad dl = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx$ $m = \int_1^e \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} x^2 dx = \int_1^e \sqrt{x^2 + 1} x dx =$ $= \frac{1}{2} \int_1^e \sqrt{x^2 + 1} d(x^2 + 1) =$ $= \frac{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}{3} \Big _1^e = \frac{1}{3} (\sqrt{(e^2 + 1)^3} + 2\sqrt{2})$
<p>Статичні моменти відносно координатних осей</p> $M_x = \int_L y \gamma(x, y) dl$ $M_y = \int_L x \gamma(x, y) dl$	<p>Знайти статичні моменти відносно осей координат однорідного відрізка прямої $2x + y = 1$, який розташований між осями координат</p> <p>Точки перетину прямої з осями координат $A(0; 1); \quad B(\frac{1}{2}; 0)$</p> $y = 1 - 2x; \quad y' = -2; \quad dl = \sqrt{5} dx$ $M_x = \int_L y dl = \sqrt{5} \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2x) dx =$ $= \sqrt{5} (x - x^2) \Big _0^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{4},$ $M_y = \int_L x dl = \sqrt{5} \int_0^{\frac{1}{2}} x dx = \sqrt{5} \frac{x^2}{2} \Big _0^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{8}$
<p>Робота силового поля</p> $A = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$	<p>Обчислити роботу сили $\vec{F} = xy\vec{i} + (x + y)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж прямої $y = x$ від точки $(0; 0)$ до точки $(1; 1)$</p> $A = \int_L xy dx + (x + y) dy =$ $= \int_0^1 (x^2 + 2x) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big _0^1 = \frac{4}{3}$

Тема «Числові ряди»

Збіжність рядів з додатними членами. Необхідна ознака збіжності ряду	
$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$	<p>Перевірити на збіжність числовий ряд</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{7n+11}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{7n+11} = \frac{3}{7} \neq 0$ <p>Необхідна ознака не виконується, тому ряд розбігається</p>
Збіжність рядів з додатними членами. Достатні ознаки збіжності ряду	
<p>Ознака порівняння</p> <p>Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A > 0$ то обидва ряди або збігаються, або розбігаються</p> <p>геометрична прогресія $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ $\begin{cases} \text{при } q < 1, & \text{збігається;} \\ \text{при } q \geq 1, & \text{розбігається} \end{cases}$</p> <p>узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ $\begin{cases} \text{при } q > 1, & \text{збігається;} \\ \text{при } q \leq 1, & \text{розбігається} \end{cases}$</p>	<p>Дослідити на збіжність числовий ряд</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 4^n}{20^n}$ $u_n = \frac{5^n + 4^n}{20^n} = \frac{5^n}{20^n} + \frac{4^n}{20^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{5}\right)^n$ <p>Геометричні прогресії з $q_1 = \frac{1}{4} < 1; q_2 = \frac{1}{5} < 1$ \Rightarrow за ознакою порівняння ряд збігається</p> <p>Дослідити на збіжність числовий ряд</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+5)}$ $u_n = \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{1}{9n^2 + 13n + 4}$ $v_n = \frac{1}{n^2}$ <p>узагальнений гармонічний ряд з $q = 2 > 1$ - збігається</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{9n^2 + 13n + 4}}{\frac{1}{n^2}} =$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{9n^2 + 13n + 4} = \frac{1}{9}$ <p>За ознакою порівняння ряд збігається</p>

<p>Ознака Даламбера</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = C =$ $\begin{cases} C < 1, & \text{ряд збігається;} \\ C > 1, & \text{ряд розбігається;} \\ C = 1, & \text{додатк. дослідж.} \end{cases}$	<p>Дослідити на збіжність числовий ряд</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n n!}$ $u_n = \frac{n^2}{5^n n!}$ $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{5^{n+1} (n+1)!} = \frac{(n+1)^2}{5^n \cdot 5n! (n+1)}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{5^n \cdot 5n! (n+1)} \cdot \frac{5^n n!}{n^2} =$ $= \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{n^2} = 0 < 1$ <p>За ознакою Даламбера ряд збігається</p>
<p>Радикальна ознака Коші</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = C =$ $\begin{cases} C < 1, & \text{ряд збігається;} \\ C > 1, & \text{ряд розбігається;} \\ C = 1, & \text{додатк. дослідж.} \end{cases}$	<p>Дослідити на збіжність числовий ряд</p> $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}} =$ $= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 3e > 1$ <p>За радикальною ознакою Коші ряд розбігається</p>
<p>Інтегральна ознака Коші</p> $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx$ $\int_1^{\infty} f(x) dx =$ $\begin{cases} A (\neq \infty), & \text{збігається;} \\ \infty (\text{або не існує}), & \text{розбігається.} \end{cases}$	<p>Дослідити на збіжність числовий ряд</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+n}{n^2+25} \rightarrow$ $\int_1^{\infty} \frac{5+x}{x^2+25} dx = 5 \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+25} + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{d(x^2+25)}{x^2+25}$ $= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(5 \operatorname{arctg} \frac{x}{5} + \frac{1}{2} \ln(x^2+25) \right) \Big _1^N =$ $= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(5 \operatorname{arctg} \frac{N}{5} + \frac{1}{2} \ln(N^2+25) \right) -$ $- 5 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \ln 26 =$ $= \frac{5\pi}{2} + \infty - 5 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \ln 26 = \infty$ <p>За інтегральною ознакою Коші ряд розбігається</p>

Збіжність знакозмінних рядів	
Необхідна ознака збіжності	Теорема Лейбниця $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$
Достатня ознака збіжності	Ряд, абсолютні величини членів якого утворюють збіжний ряд, називається абсолютно збіжним Перевірка: Ознака порівняння Ознака Даламбера Радикальна ознака Коші Інтегральна ознака Коші
<div style="text-align: center;"> <div>Перевірка знакозмінних рядів</div> <div>↓</div> <div>Необхідна умова</div> <div> <div>ні</div> <div>↓</div> <div>розбігається</div> </div> <div> <div>так</div> <div>↓</div> <div>Достатня умова</div> <div> <div>ні</div> <div>↓</div> <div>збігається умовно</div> </div> <div> <div>так</div> <div>↓</div> <div>збігається абсолютно</div> </div> </div> </div>	
Перевірити на абсолютну та умовну збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+4}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}} > \frac{1}{\sqrt{6}} > \frac{1}{\sqrt{7}} > \dots$ $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}} = 0$ Необхідна умова виконується. Перевіримо на абсолютну збіжність за граничною ознакою порівняння. Оберемо узагальнений гармонічний ряд з $p = \frac{1}{2}$ - розбіжний $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+4}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+4}} = 1$ Отже, абсолютної збіжності немає – ряд збігається умовно

Тема «Степеневі ряди»

Область збіжності степеневому ряду	
<p>За ознакою Даламбера</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{u_{n+1}}{u_n} \right < 1$ <p>Радіус збіжності</p> $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$	<p>Знайти область збіжності степеневому ряду</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n 2^n}{(n^2 + 4)}$ $u_n = \frac{x^n 2^n}{(n^2 + 4)}$ $u_{n+1} = \frac{x^{n+1} 2^{n+1}}{((n+1)^2 + 4)} = \frac{x^n \cdot x \cdot 2^n \cdot 2}{((n+1)^2 + 4)}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{u_{n+1}}{u_n} \right = \lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{x^n \cdot x \cdot 2^n \cdot 2}{((n+1)^2 + 4)} \cdot \frac{(n^2 + 4)}{x^n 2^n} \right =$ $= 2 x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4}{(n+1)^2 + 4} = 2 x $ $2 x < 1; \quad x < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ <p>Перевіримо збіжність на кінцях інтервалу</p> $x = -\frac{1}{2}: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n 2^n}{(n^2 + 4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 4}$ <p>За теоремою Лейбніца необхідна умова виконується. Перевіримо на абсолютну збіжність за граничною ознакою порівняння. Оберемо узагальнений гармонічний ряд з $p = 2$ – збіжний</p> $u_n = \frac{1}{n^2 + 4}; \quad v_n = \frac{1}{n^2}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 4} = 1$ <p>Отже, ряд збігається абсолютно.</p> $x = \frac{1}{2}: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n 2^n}{(n^2 + 4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$ <p>Даний ряд збігається за граничною ознакою порівняння.</p> <p>Остаточно радіус збіжності $R = \frac{1}{2}$, область збіжності $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.</p>

<p>За радикальною ознакою Коші</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ u_n } < 1$ <p>Радіус збіжності</p> $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}}$	<p>Знайти область збіжності степеневому ряду</p> $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (x-3)^n$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ u_n } = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n (x-3)^n} = 2 x-3 < 1$ $ x-3 < \frac{1}{2}; \quad -\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$ <p>Перевіримо збіжність на кінцях інтервалу</p> $x = \frac{5}{2}: \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{5}{2} - 3\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ <p>Отримали ряд, що «коливається», він є розбіжним</p> $x = \frac{7}{2}: \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{7}{2} - 3\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ <p>Для отриманого ряду не виконується необхідна умова збіжності ряду, отже ряд є розбіжним.</p> <p>Остаточно отримуємо радіус збіжності $R = \frac{1}{2}$, область збіжності $x \in \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$</p>
<p>Розклад функцій в степеневі ряди</p>	
<p>Ряд Тейлора</p>	$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) +$ $+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$ $\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$
<p>Ряд Маклорена</p>	$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$ $\dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$

Розклад елементарних функцій в ряд Маклорена

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \text{при } x \in (-\infty; \infty).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad \text{при } x \in (-\infty; \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad \text{при } x \in (-\infty; \infty)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

при $x \in (-1; 1)$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \quad \text{при } x \in (-1; 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots$$

$$\dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} x^n + \dots \quad \text{при } x \in (-1; 1]$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2n} x^n + \dots \quad \text{при } x \in [-1; 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

при $x \in (-1; 1]$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right) \quad \text{при } x \in (-1; 1)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

при $x \in [-1; 1]$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots \quad \text{при } x \in [-1; 1]$$

<p>Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x) = x^3 \cos \sqrt{x}$</p>	<p>Скористаємося формулою</p> $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$ <p>виконаємо заміну $x \rightarrow \sqrt{x}$</p> $\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + \dots$ <p>та помножимо на x^3:</p> $x^3 \cos \sqrt{x} = x^3 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+3}}{(2n)!} + \dots$ <p>Знайдемо інтервал збіжності отриманого ряду</p> $u_n = \frac{x^{n+3}}{(2n)!}; \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+4}}{(2(n+1))!};$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{u_{n+1}}{u_n} \right = \lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{x^{n+3, x}}{(2n)!(2n+2)} \cdot \frac{(2n)!}{x^{n+3}} \right =$ $= x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+2} = x \cdot 0;$ $ x \cdot 0 < 1 \Rightarrow$ <p>Остаточного маємо область збіжності отриманого ряду</p> $-\infty < x < \infty$
<p>Деякі застосування рядів Тейлора і Маклорена</p>	
<p>Наближене обчислення функцій</p>	<p>Обчислити значення $\sin 18^\circ$ з точністю $\alpha = 0,00001$</p> <p>Перейдемо до радіанної міри кутів $18^\circ = \frac{\pi}{10}$</p> <p>та скористаємося формулою</p> $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$ $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{\pi^3}{10^3} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{\pi^5}{10^5} - \dots$ <p>Оскільки $R_3 < \frac{1}{7!} \cdot \frac{\pi^7}{10^7} < 0,00001$</p> <p>то досить взяти три члени розкладу:</p> $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} \left(1 - \frac{1}{3!} \cdot \frac{\pi^2}{10^2} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{\pi^4}{10^4} \right) \approx$ $\approx 0,31416 \left(1 - \frac{0,09870}{6} + \frac{0,00974}{120} \right) = 0,30902$

<p>Інтегрування функцій</p>	<p>Обчислити визначений інтеграл $\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx$ з точністю $\alpha = 0,001$</p> $\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx =$ $= \int_0^2 \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots}{x} dx =$ $= \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \dots \right) dx =$ $= \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} + \dots \right) \Big _0^2$ $\approx 2 - \frac{4}{9} + \frac{4}{75} - \frac{8}{2205} \approx$ $\approx 2 - 0,4444 + 0,0533 - 0,0036 = 1,605$
<p>Інтегрування диференціальних рівнянь</p>	<p>Знайти перші п'ять ненульових члени розкладу у степеневий ряд рішення диференціального рівняння $y'' = xy + y'$, який задовольняє початковим умовам $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ методом послідовного диференціювання</p> <p>Розклад у степеневий ряд будемо виконувати в околі точки $x_0 = 0$, тобто будемо застосовувати ряд Маклорена:</p> $y(x) \approx y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n.$ <p>Виконаємо послідовне диференціювання:</p> $y(0) = 1; \quad y'(0) = 1;$ $y''(0) = (xy + y') \Big _{x=0} = 0 + 1 = 1;$ $y'''(0) = (xy + y')' \Big _{x=0} =$ $= (y + xy' + y'') \Big _{x=0} = 1 + 0 + 1 = 2;$ $y^{IV}(0) = (y + xy' + y'')' \Big _{x=0} =$ $= (y' + y' + xy'' + y''') \Big _{x=0} = 4$ $y(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{6}$

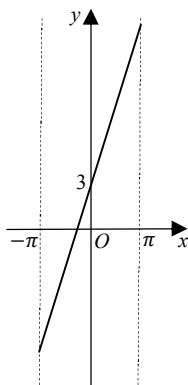
Тема «Ряди Фур'є»

Тригонометричні ряди	
Корисні співвідношення	$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx = 0$ <p>(при будь-якому значенні k)</p> $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = 0 \quad (\text{при } k \neq 0)$ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos px \, dx = 0$ <p>(при будь-якому значенні k)</p> $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin px \, dx = \begin{cases} \pi, & \text{якщо } k = p \\ 0, & \text{якщо } k \neq p \end{cases}$ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos px \, dx = \begin{cases} \pi, & \text{якщо } k = p \\ 0, & \text{якщо } k \neq p \end{cases}$
Ряд Фур'є	$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$
Коефіцієнти Фур'є	$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$ $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$ $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$

Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію

$$f(x) = 4x + 3$$

інтервалі $(-\pi; \pi)$



Обчислимо значення коефіцієнтів Фур'є

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (4x + 3) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} (2x^2 + 3x) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 6$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (4x + 3) \cos nx dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = 4x + 3 & du = 4dx \\ dv = \cos nx dx & v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi n} (4x + 3) \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{4}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx =$$

$$= 0 + \frac{4}{\pi n^2} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (4x + 3) \sin nx dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = 4x + 3 & du = 4dx \\ dv = \sin nx dx & v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right] =$$

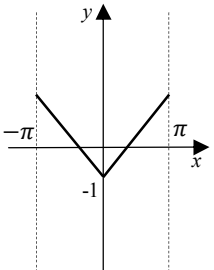
$$= -\frac{1}{\pi n} (4x + 3) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx =$$

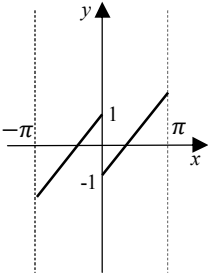
$$= -\frac{1}{\pi n} (4\pi + 3)(-1)^n + \frac{1}{\pi n} (-4\pi + 3)(-1)^n +$$

$$+ \frac{2}{\pi n^2} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{8}{n} (-1)^{n+1}$$

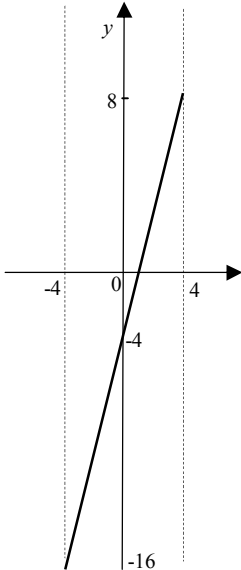
Запишемо розклад заданої функції в ряд Фур'є:

$$f(x) = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n} (-1)^{n+1} \sin nx$$

Розклад в ряд Фур'є парних та непарних функцій	
Для парних функцій	$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$ $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$
Для непарних функцій	$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$
	<p>Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x) = x - 1$, визначену в інтервалі $(0; \pi)$, довизначивши її:</p> <p>а) парним чином;</p> $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x - 1) dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big _0^{\pi} =$ $= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{2} - \pi \right) = \pi - 2;$ $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x - 1) \cos nx dx =$ $= \left[\begin{array}{ll} u = x - 1 & du = dx \\ dv = \cos nx dx & v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right] =$ $= \frac{2}{\pi n} (x - 1) \sin nx \Big _0^{\pi} - \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{\pi n^2} \cos nx \Big _0^{\pi}$ $= \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1);$ <p>Остаточно маємо розклад парної функції в ряд Фур'є:</p> $f(x) = \frac{\pi}{2} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \cos nx$

	<p>б) непарним чином</p> $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x-1) \sin nx \, dx =$ $= \left[\begin{array}{ll} u = x-1 & du = dx \\ dv = \sin nx \, dx & v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right] =$ $= -\frac{2}{\pi n} (x-1) \cos nx \Big _0^{\pi} + \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx =$ $= -\frac{2(-1)^n}{\pi n} (\pi-1) - \frac{2}{\pi n} + \frac{3}{\pi n^2} \sin nx \Big _0^{\pi} =$ $= \frac{2}{\pi n} ((\pi-1)(-1)^{n+1} - 1).$ <p>Остаточно маємо розклад непарної функції в ряд Фур'є:</p> $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} ((\pi-1)(-1)^{n+1} - 1) \sin nx$
<p>Розклад в ряд Фур'є функцій з довільним періодом</p>	
<p>Ряд Фур'є</p>	$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$
<p>Коефіцієнти Фур'є</p>	$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \, dx$ $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx$ $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx$

Розкласти в ряд Фур'є
періодичну функцію
 $f(x) = 3x - 4$,
визначену в інтервалі
 $[-4; 4]$



$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 (3x - 4) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{3x^2}{2} - 4x \right) \Big|_{-4}^4 = -4;$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 (3x - 4) \cos \frac{n\pi x}{4} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = 3x - 4 & du = 3dx \\ dv = \cos \frac{n\pi x}{4} dx & v = \frac{4}{\pi n} \sin \frac{n\pi x}{4} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{4}{\pi n} (3x - 4) \sin \frac{n\pi x}{4} \Big|_{-4}^4 - \frac{12}{\pi n} \int_{-4}^4 \sin \frac{n\pi x}{4} dx =$$

$$= \frac{48}{\pi^2 n^2} \cos \frac{n\pi x}{4} \Big|_{-2}^2 = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 (3x - 4) \sin \frac{n\pi x}{4} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = 3x - 4 & du = 3dx \\ dv = \sin \frac{n\pi x}{4} dx & v = -\frac{4}{\pi n} \cos \frac{n\pi x}{4} \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{4}{\pi n} (3x - 4) \cos \frac{n\pi x}{4} \Big|_{-4}^4 + \frac{12}{\pi n} \int_{-4}^4 \cos \frac{n\pi x}{4} dx =$$

$$= \frac{32(-1)^n}{\pi n} + \frac{48}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n\pi x}{4} \Big|_{-4}^4 = \frac{32(-1)^n}{\pi n}.$$

Запишемо розклад заданої функції в ряд Фур'є
(16.1):

$$f(x) = -4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32(-1)^n}{\pi n} \sin \frac{n\pi x}{4}$$

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 1 : навч. посібник / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 256 с.
2. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 1 : навч. посібник / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 250 с.
3. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 2 : навч. посібник / Л. Б. Коваленко. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 221 с.
4. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 2 : навч. посібник / Л. Б. Коваленко. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 192 с.
5. Станішевський С. О. Вища математика / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005. – 270 с.
6. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв’язання (Модуль 1) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 88 с.
7. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв’язання (Модуль 2) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 125 с.
8. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв’язання (Модуль 3) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 110 с.
9. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович – СПб. : Лань, 2003. – 736 с.

10. Валєєв К.Г. Вища математика: у 2 ч. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – Ч. 1. - Київ : КНЕУ, 2001. – 546 с. ; Ч. 2. – Київ : КНЕУ, 2002. – 451 с.

11. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. у 2 кн / За ред. Г. Л. Кулініча. – Київ : Либідь, 2003. – Кн. 1 : Основні розділи. – 400 с. ; Кн. 2 : Спеціальні розділи. – 368 с.

12. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. - М. : Наука, 1985. – 383 с.

13. Гусак А. А. Задачи и упражнения по высшей математике. В 2 ч. Ч. 2 / А. А. Гусак. – Минск : Вышэйшая школа, 1988. – 229 с.

Навчальне видання

КОВАЛЕНКО Людмила Борисівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модуль 3

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Відповідальний за випуск *А. В. Якунін*

Редактор *В. І. Шалда*

Комп'ютерне верстання *Л. Б. Коваленко*

Дизайн обкладинки *Т. А. Лазуренко*

Підп. до друку 07.02.2019. Формат 60×84/16

Друк на різнографі. Ум. друк. арк. 12,9

Тираж 60 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002

Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 5328 від 11.04.2017.